

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen  
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

7. Übungsblatt

**Aufgabe 32**

Betrachten Sie die quasilineare Gleichung

$$\partial_t u(x, t) + u(x, t) \partial_x u(x, t) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0)$$

mit der Anfangsbedingung  $u(x, 0) = f(x)$ .

a) Es sei

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0, \\ \exp(-\frac{1}{x}) & , x > 0. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Charakteristiken  $\begin{pmatrix} \vec{k} \\ w \end{pmatrix}$  der Gleichung, und leiten Sie daraus die Lösung des Problems mit dem gegebenen  $f$  her.

b) Was passiert, wenn  $f$  stetig differenzierbar, aber nicht monoton wachsend ist?

**Aufgabe 33**

Betrachten Sie die lineare Gleichung

$$\partial_t u(x, t) + (\cos t) \partial_x u(x, t) = 0 \quad ((x, t) \in Q)$$

mit  $Q = [0, 2\pi] \times [0, \infty)$ .

a) Bestimmen Sie die Charakteristiken der Gleichung.

b) Betrachten Sie nun den Rand  $R = \{0, 2\pi\} \times [0, \infty) \cup [0, 2\pi] \times \{0\}$  von  $Q$ . Durch jeden Punkt  $r \in R$  verläuft genau eine Grundcharakteristik  $\vec{k}$ , für die also  $\vec{k}(t_0) = r$  für ein  $t_0$  gilt. Bestimmen Sie diejenigen  $r$ , bei denen die Charakteristik nach  $Q$  hineinläuft, also bei denen  $\vec{k}(t_0 + h) \in Q$  für kleine  $h > 0$  gilt.

**Aufgabe 34**

Lösen Sie das Problem

$$\partial_t u(x, t) + tu(x, t) \partial_x u(x, t) = u(x, t), \quad u(x, 0) = -x,$$

und skizzieren Sie einige Charakteristiken.

### Aufgabe 35

Zeigen Sie die Rotationsinvarianz des Laplaceoperators  $\Delta$  auf  $\mathbb{R}^n$ : Ist  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine orthogonale Matrix und  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^2$ -Funktion, dann gilt

$$\Delta(f \circ A)(\vec{x}) = (\Delta f)(A\vec{x}) \quad \text{für alle } \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

### Aufgabe 36

Zeigen Sie, dass die durch  $u(\vec{x}) = \|\vec{x}\|^{-1}$  definierte Funktion  $u$  in  $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$  harmonisch ist.

### Aufgabe 37

- Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ein Gebiet und  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  harmonisch. Zeigen Sie, dass  $u$  lokal der Realteil einer holomorphen Funktion ist.
- Sei  $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  und  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $(x,y) \mapsto \frac{x}{x^2+y^2}$ . Zeigen Sie, dass  $u$  harmonisch in  $\Omega$  ist, und bestimmen Sie eine holomorphe Funktion  $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  so, dass  $u = \operatorname{Re} f$  gilt.
- Sei  $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  und  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch  $(x,y) \mapsto \ln(\sqrt{x^2+y^2})$ . Zeigen Sie, dass die Aussage aus Teil a) in diesem Fall tatsächlich nur lokal gilt, d.h. dass  $u$  harmonisch in  $\Omega$  ist, es aber keine holomorphe Funktion  $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $u = \operatorname{Re} f$  gibt.

*Hinweis:* Begründen Sie, dass  $f$  dann Stammfunktion von  $z \mapsto 1/z$  auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  wäre, was bekanntlich (HM II) unmöglich ist.

**Übungsklausur** Zur Teilnahme an der Übungsklausur am Samstag, den 29.01.2011, von 11:00 bis 13:00 Uhr ist keine Anmeldung erforderlich. Hörsaalverteilung der Übungsklausur:

Fachrichtung	Anfangsbuchstabe Nachname	Hörsaal
ETEC/Geodäsie	A-Z	Gerthsen-Hörsaal
Physik/Chemie	A-Z	Benz-Hörsaal

Nur durch die erfolgreiche Teilnahme an der Übungsklausur kann man einen Übungsschein erwerben. Weitere Informationen zur Übungsklausur finden Sie auf der Vorlesungshomepage.