KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
Institut für Analysis

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektro- und Informationstechnik

Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Tobias Ried, M.Sc.

Wintersemester 2013/14
Blatt 1 vom 24.10.13

http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm3etec2013w/

Übungsaufgaben

1. **Zum Aufwärmen**

   Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen/Anfangswertprobleme:

   (a) $y'x = 2y$
   (b) $y' = \frac{2x}{x^2+1}y$
   (c) $y' = -\frac{2y}{x} + 4x,\ y(1) = 0$
   (d) $y' + y\cos(x) = \sin(x)\cos(x),\ y(0) = 1$
   (e) $2y' + y^2 + x^{-2} = 0$
   Hinweis: Substituieren Sie $z(x) = xy(x)$
   (f) $y' = (x+y)^2 - (x+y) - 1$

2. **Füllhöhe eines zylinderförmigen Behälters**

   Ein zylindrischer Wasserbehälter (Radius R) wird durch ein kreisförmiges Loch mit Radius r im Boden entleert. Nach dem Gesetz von Toricelli gilt für die Füllhöhe $h(t)$ die Differentialgleichung

   $$\dot{h}(t) = -\alpha\sqrt{h(t)}, \quad \alpha = \frac{r}{R}\sqrt{2g} > 0 \quad (g \text{ Erdbeschleunigung}).$$

   Bestimmen Sie die (positive!) Füllhöhe in Abhängigkeit der Zeit t, wenn das Gefäß anfangs bis zur Höhe h_0 gefüllt war. Wie lange dauert es, bis der Behälter leer ist?

3. **Bernoulli-Differentialgleichung**

   (a) Seien $h, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Lösen Sie die Bernoulli-Differentialgleichung

   $$y' + h(x)y = q(x)y^\alpha$$

   mithilfe der Substitution $z(x) = y(x)^\lambda$ für ein geeignetes $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (b) Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $y' = \frac{x}{x^2-y^2-1}$.

4. **Exakte Differentialgleichungen**

   Gegeben sei die Differentialgleichung

   $$y' = -\frac{2x + 4y + 2}{4x + 12y + 8}. \tag{1}$$

   (a) Finden Sie eine Funktion $H(x,y)$ mit der Eigenschaft, dass $y'(x) = -\frac{D_1H(x,y(x))}{D_2H(x,y(x))}$.

   (b) Lösen Sie damit die Differentialgleichung (1) und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.
   Hinweis: Kettenregel. Möglicherweise kann man die Lösungen nur implizit angeben – was können Sie in diesem Fall über die Lösungen aussagen?

5. **Picard-Iteration, I**

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = (1 + y)\cos x, \quad y(0) = c \in \mathbb{R} \tag{2}$$

iterativ. Sei hierfür $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Picard-Folge zur Differentialgleichung (2),

$$y_n(x) = y(0) + \int_0^x (1 + y_{n-1}(\xi))\cos\xi \,\mathrm{d}\xi, \quad y_0(x) = c.$$

Zeigen Sie, dass die Folge (y_n) punktweise konvergiert und die Grenzfunktion $y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x)$ eine Lösung des Anfangswertproblems ist. Geben Sie diese in geschlossener Form an.

Hinweis: Berechnen Sie zunächst die ersten Folgeglieder von (y_n) und finden Sie eine Darstellung von y_n für allgemeines $n \in \mathbb{N}$ (Induktion!).

6. **Picard-Iteration, II**

Man löse die Anfangswertaufgabe für das folgende System von Differentialgleichungen für die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$,

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= 2ty(t)\\ \dot{y}(t) &= -2tx(t)\end{aligned}\quad, \quad \begin{pmatrix}x(0)\\y(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

durch die Picard-Iteration. Geben Sie die Lösung in geschlossener Form an.

Hinweis: Man schreibe das Differentialgleichungssystem mit der vektorwertigen Funktion $\vec{Z}(t) = \begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$ in der Form $\dot{\vec{Z}}(t) = \vec{F}(t, \vec{Z}(t))$ mit einer geeigneten Funktion $\vec{F} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Lösen Sie diese Gleichung iterativ.

$$\vec{Z}_n(t) = \vec{Z}(0) + \int_0^t \vec{F}(s, \vec{Z}_{n-1}(s))\,\mathrm{d}s, \quad \vec{Z}_0(t) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wie lautet $\vec{Z}_{2n-1}(t)$?

Besprechung der Übungsaufgaben: Freitag, 08.11.2013 und Freitag, 15.11.2013

Wichtige Termine

- Die **Übungsklausur** zur Vorlesung findet am Samstag, 01.02.2014, von 08.00 bis 10.00 Uhr statt.
- Die **Klausur** zur Vorlesung findet am Donnerstag, 06.03.2014, von 11.00 bis 13.00 Uhr statt.
- Der **Anmeldeschluss** für die Klausur ist Freitag, 07.02.2014. Für die Teilnahme an der Übungsklausur ist keine Anmeldung erforderlich.

Allgemeine Hinweise

- Wichtige Bekanntmachungen finden Sie auf der Vorlesungswebseite

`http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm3etec2013w/`