Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektro- und Informationstechnik

Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Tobias Ried, M.Sc.
Wintersemester 2013/14
Blatt 1 vom 08.11.2013

http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm3etec2013w/

Lösungsvorschläge

1. **Zum Aufwärmen**

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen/Anfangswertprobleme:

(a) $y'x = 2y$

(b) $y' = \frac{2x}{x^2+1}y$

(c) $y' = -\frac{2y}{x} + 4x$, $y(1) = 0$

(d) $y' + y\cos(x) = \sin(x)\cos(x)$, $y(0) = 1$

(e) $2y' + y^2 + x^{-2} = 0$
Hinweis: Substituieren Sie $z(x) = xy(x)$

(f) $y' = (x+y)^2 - (x+y) - 1$

Lösung:

(a) Separation der Variablen
Zunächst folgt aus der Differentialgleichung für $x = 0$, dass $y(0) = 0$. Andere Anfangswerte sind also dort nicht möglich. Man sieht weiter, dass die konstante Funktion $y \equiv 0$ eine Lösung ist. Für $x \neq 0$ kann durch x dividiert werden. $\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{x} + C$, $C \in \mathbb{R}$ ergibt $\ln|y| = 2\ln|x| + C = \ln(x^2) + C$ und damit $y(x) = \pm e^C x^2$. Bei der Integration ist zu beachten, dass nicht über die Polstellen der Integranden integriert werden darf. Lösungen sind also zunächst nur auf $(0,\infty)$ bzw. $(-\infty,0)$ definiert, lassen sich aber bei $x = 0$ differenzierbar stückeln:

$$y(x) = \begin{cases} c_1x^2 & \text{für } x \geq 0 \\ c_2x^2 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(b) Separation der Variablen
$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + C$, $C \in \mathbb{R}$ liefert $\ln|y| = \ln(x^2+1) + C$, also $y = \pm e^C(x^2+1)$. Da die konstante Funktion $y \equiv 0$ auch eine Lösung ist, kann man allgemeine Lösung schreiben als

$$y(x) = c(x^2+1), \quad c \in \mathbb{R}.$$

(c) Lineare inhomogene DGL 1. Ordnung

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL $y' + \frac{2}{x}y = 0$ ist gegeben durch cy_0 mit

$$y_0(x) = \exp\left(-\int_1^x \frac{2}{t}\,\mathrm{d}t\right) = \exp(-2\ln x) = \frac{1}{x^2},$$

$c \in \mathbb{R}$. Eine partikuläre Lösung erhält man aus

$$y_p(x) = \left(\int_1^x \frac{4t}{y_0(t)}\,\mathrm{d}t\right) y_0(x) = \left(\int_1^x 4t^3\,\mathrm{d}t\right)\frac{1}{x^2} = \frac{x^4-1}{x^2} = x^2 - \frac{1}{x^2}$$

Die allgemeine Lösung der DGL ist daher

$$\varphi(x) = cy_0(x) + y_p(x) = \frac{c-1}{x^2} + x^2$$

und aus der Anfangsbedingung $\varphi(1) = c = 0$ folgt, dass die Funktion $y(x) = x^2 - x$ das gegebene Anfangswertproblem löst.

(d) Lineare inhomogene DGL 1. Ordnung
Die homogene DGL $y' + y\cos x = 0$ wird gelöst durch $cy_0(x)$ ($c \in \mathbb{R}$),

$$y_0(x) = \exp\left(-\int_0^x \cos t\,\mathrm{d}t\right) = \exp\left(-\sin x\right).$$

Eine partikuläre Lösung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \left(\int_0^x \sin t\cos t\, e^{\sin t}\,\mathrm{d}t\right) e^{-\sin x} = \left(\int_0^{\sin x} se^s\,\mathrm{d}s\right) e^{-\sin x} \\ &= \left([se^s]_0^{\sin x} - \int_0^{\sin x} e^s\,\mathrm{d}s\right) e^{-\sin x} = \left(\sin x\, e^{\sin x} + 1 - e^{\sin x}\right) e^{-\sin x} \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der DGL lässt sich also schreiben als

$$\varphi(x) = cy_0(x) + y_p(x) = e^{-\sin x}\left(c + 1 + e^{\sin x}(\sin x - 1)\right).$$

Wegen $\varphi(0) = c = 1$ ist die Funktion

$$y(x) = e^{-\sin x}\left(2 + e^{\sin x}(\sin x - 1)\right)$$

Lösung des Anfangswertproblems.

(e) Substitution
Substituiert man $z(x) = xy(x)$, so gilt für $x \neq 0$

$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{z(x)}{x}\right) = \frac{z'(x)}{x} - \frac{z(x)}{x^2}.$$

Aus der DGL für y erhält man

$$0 = \frac{2z'(x)}{x} - \frac{2z(x)}{x^2} + \frac{z(x)^2}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{2z'(x)}{x} + \frac{(z(x)-1)^2}{x^2},$$

welche nach Multiplikation mit x auf die DGL mit getrennten Variablen

$$z' = -\frac{(z-1)^2}{2x}$$

führt.
$\int \frac{\mathrm{d}z}{(z-1)^2} = \int -\frac{\mathrm{d}x}{2x} + C$ ($C \in \mathbb{R}$) liefert $-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2}\ln|x| + C$ und damit $z(x) = 1 + \frac{2}{\ln|x|+2C}$ auf jedem Intervall, das 0 nicht enthält. Resubstitution liefert $y(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x(\ln|x|+2C)}$ als Lösung der ursprünglichen DGL auf jedem Intervall, das Null nicht enthält.

(f) Substitution
Definiert man $z(x) = x + y(x)$ so gilt $y'(x) = z'(x) - 1$. Eingesetzt in die Differentialgleichung führt dies zu

$$z'(x) - 1 = z(x)^2 - z(x) - 1,$$

also $z'(x) = z(x)(z(x) - 1)$. Diese ist von Typ getrennte Veränderliche mit Lösung implizit gegeben durch

$$\int \mathrm{d}x + C = \int \frac{\mathrm{d}z}{z(z-1)} = \int \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}\right) \mathrm{d}z = \ln|z-1| - \ln|z| = \ln\left|\frac{z-1}{z}\right|,$$

also $x + C = \ln\left|\frac{z-1}{z}\right|$, $C \in \mathbb{R}$. Es folgt

$$\pm e^C e^x = \frac{z-1}{z} = 1 - \frac{1}{z}$$

und aufgelöst nach z

$$z(x) = \frac{1}{1 \mp e^C e^x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Da die konstante Funktion $z \equiv 1$ auch eine Lösung der Differentialgleichung ist, kann die allgemeine Lösung (neben der Nullfunktion, welche die DGL auch löst) geschrieben werden als $z(x) = \frac{1}{1+ce^x}$, $c \in \mathbb{R}$.
Resubstitution $y(x) = z(x) - x$ liefert die Lösungen

$$\begin{aligned} y_0(x) &= -x \\ y_c(x) &= \frac{1}{1+ce^x} - x, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

der ursprünglichen DGL.

2. **Füllhöhe eines zylinderförmigen Behälters**

Ein zylindrischer Wasserbehälter (Radius R) wird durch ein kreisförmiges Loch mit Radius r im Boden entleert. Nach dem Gesetz von Toricelli gilt für die Füllhöhe $h(t)$ die Differentialgleichung

$$\dot{h}(t) = -\alpha\sqrt{h(t)}, \quad \alpha = \tfrac{r}{R}\sqrt{2g} > 0 \quad (g \text{ Erdbeschleunigung}).$$

Bestimmen Sie die (positive!) Füllhöhe in Abhängigkeit der Zeit t, wenn das Gefäß anfangs bis zur Höhe h_0 gefüllt war. Wie lange dauert es, bis der Behälter leer ist?

Lösung: Für $h_0 = 0$ ist $h \equiv 0$ eine Lösung. Sei also $h_0 > 0$ und damit auch (mindestens für kleine $t > 0$) $h(t) > 0$. Die DGL ist eine DGL mit getrennten Variablen. Neben der Standardmethode kann alternativ auch folgendermaßen verfahren werden, um die Lösung des Anfangswertproblems zu finden. Durch die Substitution $y(t) = \sqrt{h(t)}$ wird die DGL zu

$$\dot{y}(t) = -\frac{\alpha}{2}$$

mit der allgemeinen Lösung $y(t) = c - \frac{\alpha}{2}t$ ($c > 0$ konstant). Resubstitution liefert $h(t) = (c - \frac{\alpha}{2}t)^2$. Die Anfangsbedingung $h(0) = h_0$ gibt $c = \sqrt{h_0}$, also

$$h(t) = (\sqrt{y_0} - \frac{\alpha}{2}t)^2.$$

Für $t_0 = \frac{2\sqrt{h_0}}{\alpha}$ ist $h(t_0) = 0$ (das Gefäß ist leer).

3. Bernoulli-Differentialgleichung

(a) Seien $h, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Lösen Sie die Bernoulli-Differentialgleichung

$$y' + h(x)y = q(x)y^\alpha$$

mithilfe der Substitution $z(x) = y(x)^\lambda$ für ein geeignetes $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Finden Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $y' = \frac{x}{x^2-y^2-1}$.

LÖSUNG:

(a) Die DGL für y wird durch die Substitution $z = y^\lambda$ zur DGL

$$\tfrac{1}{\lambda}z'(x) + h(x)z(x) = q(x)z(x)^{\frac{\alpha-1+\lambda}{\lambda}}$$

für z. Wählt man $\lambda = 1-\alpha$ ($\alpha \neq 1$), so gilt

$$\tfrac{1}{1-\alpha}z'(x) + h(x)z(x) = q(x) \quad \text{bzw.} \quad z'(x) + (1-\alpha)h(x)z(x) = (1-\alpha)q(x)$$

Dies ist eine lineare inhomogene DGL erster Ordnung, welche durch

$$\begin{aligned} z(x) &= z(x_0)e^{-(1-\alpha)\int_{x_0}^x h(t)\,\mathrm{d}t} + e^{-(1-\alpha)\int_{x_0}^x h(t)\,\mathrm{d}t}(1-\alpha)\int_{x_0}^x q(t)e^{(1-\alpha)\int_{x_0}^t h(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t \\ &= e^{-(1-\alpha)\int_{x_0}^x h(t)\,\mathrm{d}t}\left(z(x_0) + (1-\alpha)\int_{x_0}^x q(t)e^{(1-\alpha)\int_{x_0}^t h(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t\right) \end{aligned}$$

gelöst wird. Damit ist

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^x h(t)\,\mathrm{d}t}\left(y(x_0)^{1-\alpha} + (1-\alpha)\int_{x_0}^x q(t)e^{(1-\alpha)\int_{x_0}^t h(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

die Lösung der Bernoulli-Differentialgleichung.

(b) Fasst man die vorliegende Differentialgleichung als Differentialgleichung für die Umkehrfunktion $x(y)$ von y auf, so gilt ($y'(x) = \frac{1}{x'(y)}$)

$$\frac{1}{x'(y)} = \frac{x(y)}{x(y)^2 - y^2 - 1},$$

also $x'(y) = x(y) - (1+y^2)x(y)^{-1}$. Dies ist eine DGL vom Bernoulli-Typ ($\alpha = -1$), welche nach Aufgabenteil (a) die Lösung (in impliziter Form)

$$x^2 = ce^{2y} + 2e^{2y}\int -(1+y^2)e^{-2y}\,\mathrm{d}y = ce^{2y} + 2e^{2y}\tfrac{1}{4}e^{-2y}(3+2y+2y^2) = ce^{2y} + \tfrac{3}{2} + y + y^2$$

besitzt ($c \in \mathbb{R}$ konstant).

4. **Exakte Differentialgleichungen**

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{2x + 4y + 2}{4x + 12y + 8}. \tag{1}$$

(a) Finden Sie eine Funktion $H(x, y)$ mit der Eigenschaft, dass $y'(x) = -\frac{D_1 H(x,y(x))}{D_2 H(x,y(x))}$.

(b) Lösen Sie damit die Differentialgleichung (1) und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.
HINWEIS: Kettenregel. Möglicherweise kann man die Lösungen nur implizit angeben – was können Sie in diesem Fall über die Lösungen aussagen?

LÖSUNG:

(a) Aus $D_1 H(x, y) = 2x + 4y + 2$ erhält man

$$H(x, y) = \int (2x + 4y + 2)\, \mathrm{d}x = x^2 + 4xy + 2x + f(y)$$

und aus $D_2 H(x, y) = 4x + 12y + 8$ folgt

$$H(x, y) = \int (4 + 12y + 8)\, \mathrm{d}y = 4xy + 6y^2 + 8y + g(x)$$

Wählt man also $H(x, y) = x^2 + 6y^2 + 4xy + 8y + 2x$, so gilt

$$y'(x) = -\frac{D_1 H(x, y(x))}{D_2 H(x, y(x))}. \tag{2}$$

(b) Die Differentialgleichung (2) kann in die Form

$$D_1 H(x, y(x)) + D_2 H(x, y(x)) y'(x) = 0$$

gebracht werden. Nach Kettenregel gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} H(x, y(y)) = D_1 H(x, y(x)) + D_2 H(x, y(x)) y'(x)$$

weshalb die Differentialgleichung (2) äquivalent ist zur DGL $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} H(x, y(x)) = 0$. Integration liefert $H(x, y(x)) = C$, $C \in \mathbb{R}$ konstant. Lösungen der Differentialgleichung verlaufen also entlang von Höhenlinien der Funktion $H(x, y)$. Im konkreten Fall (1) sind die Lösungen implizit gegeben durch

$$x^2 + 6y^2 + 4xy + 8y + 2x = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Dies sind Ellipsen mit Mittelpunkt bei $\nabla H(x, y) = 0$ und Halbachsen, die durch die Eigenvektoren und -werte des quadratischen Teils von H gegeben sind.

5. **Picard-Iteration, I**

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = (1 + y)\cos x, \quad y(0) = c \in \mathbb{R} \tag{3}$$

iterativ. Sei hierfür $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Picard-Folge zur Differentialgleichung (3),

$$y_n(x) = y(0) + \int_0^x (1 + y_{n-1}(\xi))\cos\xi \,\mathrm{d}\xi, \quad y_0(x) = c.$$

Zeigen Sie, dass die Folge (y_n) punktweise konvergiert und die Grenzfunktion $y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x)$ eine Lösung des Anfangswertproblems ist. Geben Sie diese in geschlossener Form an.

Hinweis: Berechnen Sie zunächst die ersten Folgeglieder von (y_n) und finden Sie eine Darstellung von y_n für allgemeines $n \in \mathbb{N}$ (Induktion!).

Lösung: Es ist

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= c + \int_0^x (1 + c)\cos\xi \,\mathrm{d}\xi = c + (1 + c)\sin x \\
y_2(x) &= c + \int_0^x (1 + c + (1 + c)\sin\xi)\cos\xi \,\mathrm{d}\xi = c + (1 + c)(\sin x + \tfrac{1}{2}\sin^2 x) \\
y_3(x) &= c + \int_0^x (1 + c + (1 + c)(\sin\xi + \tfrac{1}{2}\sin^2\xi))\cos\xi \,\mathrm{d}\xi \\
&= c + (1 + c)(\sin x + \tfrac{1}{2}\sin^2 x + \tfrac{1}{2\cdot 3}\sin^3 x)
\end{aligned}$$

Man vermutet also

$$y_n(x) = c + (1 + c)\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin^k x}{k!} = c + (1 + c)\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin^k x}{k!} - 1\right)$$

und zeigt dies mittel vollständiger Induktion. Wegen $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \exp z$ für alle $z \in \mathbb{R}$ ist die Folge $y_n(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergent und es gilt

$$\begin{aligned}
y_\infty(x) := \lim_{n\to\infty} y_n(x) &= c + (1 + c)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin^k x}{k!} - 1\right) \\
&= c + (1 + c)\left(e^{\sin x} - 1\right) = (1 + c)e^{\sin x} - 1, \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung sieht man leicht, dass dies in der Tat eine Lösung der Differentialgleichung ist, die wegen $y_\infty(0) = 1 + c - 1 = c$ auch das Anfangswertproblem löst.

6. **Picard-Iteration, II**

Man löse die Anfangswertaufgabe für das folgende System von Differentialgleichungen für die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 2ty(t) \\ \dot{y}(t) &= -2tx(t) \end{aligned} \quad , \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

durch die Picard-Iteration. Geben Sie die Lösung in geschlossener Form an.

Hinweis: Man schreibe das Differentialgleichungssystem mit der vektorwertigen Funktion $\vec{Z}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ in der Form $\dot{\vec{Z}}(t) = \vec{F}(t, \vec{Z}(t))$ mit einer geeigneten Funktion $\vec{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Lösen Sie diese Gleichung iterativ.

$$\vec{Z}_n(t) = \vec{Z}(0) + \int_0^t \vec{F}(s, \vec{Z}_{n-1}(s))\,\mathrm{d}s, \quad \vec{Z}_0(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wie lautet $\vec{Z}_{2n-1}(t)$?

Lösung: Die Funktion $\vec{F}(t, \vec{Z}) = (2ty, -2tx)^{\mathrm{T}}$ hat die gewünschten Eigenschaften. Es ist also

$$\begin{aligned} \vec{Z}_1(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 2s \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}s = \begin{pmatrix} t^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \vec{Z}_2(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 2s \\ -2s^3 \end{pmatrix} \mathrm{d}s = \begin{pmatrix} t^2 \\ 1 - \frac{1}{2}t^4 \end{pmatrix}, \\ \vec{Z}_3(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 2s - s^5 \\ -2s^3 \end{pmatrix} \mathrm{d}s = \begin{pmatrix} t^2 - \frac{1}{6}t^6 \\ 1 - \frac{1}{2}t^4 \end{pmatrix}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Man vermutet

$$\vec{Z}_{2n-1}(t) = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(t^2)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(t^2)^{2k}}{(2k)!} \end{pmatrix}, \qquad \vec{Z}_{2n}(t) = \vec{Z}_{2n-1}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ (-1)^n \frac{(t^2)^{2n}}{(2n)!} \end{pmatrix}.$$

und zeigt dies mit vollständiger Induktion. Es folgt

$$\vec{Z}_\infty(t) = \lim_{n\to\infty} \vec{Z}_n(t) = \begin{pmatrix} \sin t^2 \\ \cos t^2 \end{pmatrix}.$$

In der Tat überprüft man leicht, dass die Funktionen

$$x(t) = \sin t^2, \quad y(t) = \cos t^2$$

das Anfangswertproblem lösen.