Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektro- und Informationstechnik

Dr. Andreas Müller-Rettkowski — Wintersemester 2013/14
Tobias Ried, M.Sc. — Blatt 2 vom 07.11.13
http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm3etec2013w/

Übungsaufgaben

1. **Geometrisches Problem**

   Finden Sie alle Funktionen $y(t)$ mit der Eigenschaft, dass die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion, den Koordinatenachsen und der Geraden $t = x$ $(x > 0)$ gegeben ist durch

   $$\text{(a)} \quad A(x,y) = \frac{y^3}{2x} \qquad \text{(b)} \quad A(x,y) = \frac{x}{y}.$$

2. **Lipschitz-Bedingung**

   Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle. Zeigen Sie: Ist $F : I \times J \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar bezüglich der zweiten Variablen, so besitzt das Anfangswertproblem

   $$y'(x) = F(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0$$

   eine eindeutige Lösung.

   Hinweis: Zeigen Sie, dass F in $I \times J$ einer Lipschitz-Bedingung genügt.

3. **Eindeutigkeit von Lösungen**

   Bestimmen Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems $y' = -|y|^\alpha$, $y(0) = 1$ für

   $$\text{(a)} \quad \alpha = 2 \qquad \text{(b)} \quad \alpha = 1 \qquad \text{(c)} \quad \alpha = \tfrac{1}{2}.$$

4. **Variation der Konstanten**

   (a) Gegeben sei die lineare inhomogene DGL 1. Ordnung

   $$y'(x) + h(x)y(x) = q(x), \quad x \in I \subset \mathbb{R}\,\text{Intervall}. \tag{1}$$

   mit $h, q \in \mathscr{C}(I)$.
   Bezeichne y_{hom} eine Lösung der homogenen Gleichung $y'(x) + h(x)y(x) = 0$.

   (i) Sei $y_p(x) := c(x)y_{hom}(x)$, $c \in \mathscr{C}^1(I)$. Welcher Differentialgleichung muss c genügen, damit y_p Lösung der Differentialgleichung (1) ist?

   (ii) Lösen Sie die Differentialgleichung für die Funktion c aus Aufgabenteil (a).

   (iii) Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1) an.

   (b) Berechnen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $y' = \frac{1+xy}{1-x^2}$.

Besprechung der Übungsaufgaben: Freitag, 15.11.2013