KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
Institut für Analysis

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektro- und Informationstechnik

Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Tobias Ried, M.Sc.

Wintersemester 2013/14
Blatt 2 vom 22.11.2013

http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm3etec2013w/

Lösungsvorschläge

1. **Geometrisches Problem**

   Finden Sie alle Funktionen $y(t)$ mit der Eigenschaft, dass die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion, den Koordinatenachsen und der Geraden $t = x$ ($x > 0$) gegeben ist durch

$$\text{(a)} \quad A(x,y) = \frac{y^3}{2x} \qquad \text{(b)} \quad A(x,y) = \frac{x}{y}.$$

Lösung: In der ersten Übung wurde bewiesen, dass y der Differentialgleichung

$$D_1A(x,y(x)) + D_2A(x,y(x))y'(x) = y \tag{1}$$

genügt.

(a) Für $A(x,y) = \frac{y^3}{2x}$ lautet die Differentialgleichung für y

$$\frac{3}{2}\frac{y^2}{x^2}y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{2}\frac{y^3}{x^3}.$$

Substituiert man $z(x) = \left(\frac{y(x)}{x}\right)^2$, also $y(x) = x\sqrt{z(x)}$, so gilt

$$y'(x) = \sqrt{z(x)} + x\frac{z'(x)}{2\sqrt{z(x)}}.$$

Die Differentialgleichung für z lautet daher

$$z'(x) + \frac{4}{3}\frac{1}{x}z = \frac{4}{3}\frac{1}{x}.$$

Es handelt sich dabei um eine lineare inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung. Die Lösung der homogenen Gleichung $z' = -\frac{4}{3}\frac{1}{x}z$ ist gegeben durch

$$z_0(x) = c\exp\left(\int_1^x -\frac{4}{3}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right) = c\exp\left(-\frac{4}{3}\ln x\right) = \frac{c}{x^{4/3}}$$

Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung findet man durch "scharfes ansehen": $z_p(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist eine Lösung der Differentialgleichung (alternativ kann man natürlich auch die Lösungsformel/Variation der Konstanten zum Finden der Partikulärlösung verwenden).
Zusammengefasst ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für z

$$z(x) = z_0(x) + z_p(x) = 1 + \frac{c}{x^{4/3}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Durch Resubstitution $\left(\frac{y(x)}{x}\right)^2 = 1 + \frac{c}{x^{4/3}}$ findet man in impliziter Form

$$y(x)^2 = x^2 + cx^{2/3}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(b) Für $A(x,y) = \frac{x}{y}$ ist die Differentialgleichung für y

$$y = \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}y' \quad \text{bzw.} \quad y^3 = y - xy'$$

Für $x \neq 0$ lässt sich dies umformen zur Differentialgleichung $y' = \frac{y}{x}(1-y^2)$ mit getrennten Veränderlichen. Die Lösung der Differentialgleichung erhält man durch Lösen von

$$\begin{aligned}\ln|x| + C = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} &= \int \frac{\mathrm{d}y}{y(1-y^2)} = \int \frac{\mathrm{d}y}{y(1-y)(1+y)} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}y}{y} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}y}{1-y} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}y}{1+y} = \ln \frac{|y|}{|1-y^2|^{1/2}}.\end{aligned}$$

Es folgt

$$\left|\frac{y^2}{1-y^2}\right| = e^{2C}|x|^2 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{y^2} - 1\right| = e^{-2C}\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \frac{1}{y^2} = 1 \pm e^{-2C}\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow y^2 = \frac{x^2}{x^2 \pm e^{-2C}}$$

und damit

$$y(x) = \pm\frac{|x|}{\sqrt{|x^2 + C|}}.$$

Für $C \geq 0$ ist die Lösung auf $\mathbb{R}$ definiert, für $C < 0$ auf jedem Intervall, das $\pm\sqrt{-C}$ nicht enthält.

2. **Lipschitz-Bedingung**

   Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle. Zeigen Sie: Ist $F : I \times J \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar bezüglich der zweiten Variablen, so besitzt das Anfangswertproblem

   $$y'(x) = F(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0$$

   eine eindeutige Lösung.

   Hinweis: Zeigen Sie, dass F in $I \times J$ einer Lipschitz-Bedingung genügt.

   Lösung: Genügt F in $I \times J$ einer Lipschitz-Bedingung so gilt nach dem Satz von Picard-Lindelöf, dass das Anfangswertproblem $y'(x) = F(x, y(x))$, $y(x_0) = y_0$ lokal eindeutig lösbar ist.

   Seien dazu $x \in I$, $y_1, y_2 \in J$. Definiert man $L := \sup_{\eta \in J} |D_2 F(x, \eta)|$. Nach dem Mittelwertsatz gilt dann, dass ein $\eta \in (\min\{y_1, y_2\}, \max\{y_1, y_2\})$ existiert mit

   $$\left|\frac{F(x, y_1) - F(x, y_2)}{y_1 - y_2}\right| = \left|D_2 F(x, \eta)\right| \leq \sup_{\eta \in J} \left|D_2 F(x, \eta)\right| = L.$$

   Es folgt $|F(x, y_1) - F(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ für alle $(x, y_1), (x, y_2) \in I \times J$.

3. Eindeutigkeit von Lösungen

Bestimmen Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems $y' = -|y|^\alpha$, $y(0) = 1$ für

(a) $\alpha = 2$ (b) $\alpha = 1$ (c) $\alpha = \frac{1}{2}$.

Lösung: Einige Vorbemerkungen: Die Differentialgleichung ist von Typ "getrennte Veränderliche". Lösungen des Anfangswertproblems erhält man daher aus dem Ansatz (zunächst für $y(x) > 0$)

$$x = \int_0^x \mathrm{d}\xi = \int_{y(0)}^{y(x)} \frac{\mathrm{d}\eta}{-\eta^\alpha} = \begin{cases} [-\frac{\eta^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}]_1^{y(x)} = -\frac{y(x)^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} & (\alpha \neq 1) \\ [-\ln \eta]_1^{y(x)} = -\log y(x) & (\alpha = 1) \end{cases} \tag{2}$$

Sei $F_\alpha(y) = -|y|^\alpha$. Die Funktion $F_2(y) = -y^2$ ist stetig differenzierbar und damit auch Lipschitz-stetig. Für $\alpha = 1$ gilt wegen der umgekehrten Dreiecksungleichung $\big||y_1| - |y_2|\big| \leq |y_1 - y_2|$, dass F_1 Lipschitz-stetig ist. Die Funktion $F_{1/2}$ hingegen ist nicht Lipschitz-stetig, z.B. gilt für $y_1 = \frac{1}{4}$, $y_2 = 0$, dass $|(\frac{1}{4})^{1/2} - 0^{1/2}| = \frac{1}{2} > |\frac{1}{4} - 0| = \frac{1}{4}$.

(a) Für $\alpha = 2$ ergibt (2) $x = y(x)^{-1} - 1$, also

$$y(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Das maximale Intervall auf dem die Lösung definiert ist und das $t = 0$ enthält, ist $(-1, \infty)$. Dies ist die einzige Lösung des Anfangswertproblems (jede andere Lösung ist eine Einschränkung dieser Lösung auf ein kleineres Intervall).

(b) Für $\alpha = 1$ ist nach (2) $x = -\log y(x)$, aufgelöst nach $y(x)$

$$y(x) = e^{-x},$$

definiert auf ganz $\mathbb{R}$. Dies ist die einzige Lösung des Anfangswertproblems, denn

(i) das lineare Anfangswertproblem $y' = -y$, $y(0) = 1$, hat die eindeutige Lösung e^{-x}

(ii) die Lösung $y(x) = e^{-x}$ ist überall positiv, und die beiden Differentialgleichungen stimmen für positive Funktionen überein.

Daher kann es (bis auf Einschränkungen auf kleinere Intervalle) keine weiteren Lösungen der Differentialgleichung geben.

(c) Für $\alpha = \frac{1}{2}$ ergibt (2) $x = -2\sqrt{y(x)} + 2$, damit ($y(0) = 1$!)

$$y(x) = \tfrac{1}{4}(x-2)^2, \quad t \leq 2.$$

Diese Funktion ist auf dem maximalen Intervall $(-\infty, 2]$ eine Lösung ($y(x)$ muss monoton fallen). Die Lösung kann auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden durch 0,

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x-2)^2, & x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Aus Symmetriegründen ist auch $-\frac{1}{4}(x - x_0)^2$ für $x \geq x_0 \geq 2$ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = -\sqrt{|y|}$ (nachrechnen!). Insgesamt erhält man also eine ganze Schar von Lösungen des Anfangswertproblems, parametrisiert durch $x_0 \geq 2$:

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x-2)^2, & x \leq 2 \\ 0, & 2 < x \leq x_0 \\ -\frac{1}{4}(x-x_0)^2, & x_0 < x \end{cases}$$

4. **Variation der Konstanten**

(a) Gegeben sei die lineare inhomogene DGL 1. Ordnung

$$y'(x) + h(x)y(x) = q(x), \quad x \in I \subset \mathbb{R}\,\text{Intervall}. \tag{3}$$

mit $h, q \in \mathscr{C}(I)$.
Bezeichne y_{hom} eine Lösung der homogenen Gleichung $y'(x) + h(x)y(x) = 0$.

(i) Sei $y_p(x) := c(x)y_{hom}(x)$, $c \in \mathscr{C}^1(I)$. Welcher Differentialgleichung muss c genügen, damit y_p Lösung der Differentialgleichung (3) ist?

(ii) Lösen Sie die Differentialgleichung für die Funktion c aus Aufgabenteil (a).

(iii) Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (3) an.

(b) Berechnen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $y' = \frac{1+xy}{1-x^2}$.

Lösung:

(a) Es ist $y_p'(x) = c'(x)y_{hom}(x) + c(x)y_{hom}'(x)$. Damit y_p die Differentialgleichung (3) löst, muss $y_p'(x) + h(x)y_p'(x) = q(x)$ gelten, also

$$q(x) = c'(x)y_{hom}(x) + c(x)\underbrace{[y_{hom}'(x) + h(x)y_{hom}(x)]}_{=0} = c'(x)y_{hom}(x)$$

Ist folglich $c'(x) = \frac{q(x)}{y_{hom}(x)}$, so ist y_p eine Lösung der Differentialgleichung (3).
Diese Differentialgleichung für c wird durch

$$c(x) = \int \frac{q(x)}{y_{hom}(x)}\,\mathrm{d}x$$

gelöst, womit man

$$y_p(x) = c(x)y_{hom}(x) = \left(\int \frac{q(x)}{y_{hom}(x)}\,\mathrm{d}x\right) y_{hom}(x)$$

hat.
Die allgemeine Lösung der linearen inhomogenen Differentialgleichung erster Ordnung ist daher gegeben durch

$$\begin{aligned} y(x) = Cy_{hom}(x) + y_p(x) &= Cy_{hom}(x) + \left(\int \frac{q(x)}{y_{hom}(x)}\,\mathrm{d}x\right) y_{hom}(x) \\ &= \left(C + \int \frac{q(x)}{y_{hom}(x)}\,\mathrm{d}x\right) y_{hom}(x), \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) Die Lösung der homogenen Differentialgleichung $y' = \frac{x}{1-x^2}y$ ist gegeben durch

$$y_{hom}(x) = \exp\left(\int \frac{x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\ln|1-x^2|\right) = \frac{1}{|1-x^2|^{1/2}}$$

Nach Aufgabenteil (a) ist eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung gegeben durch

$$\left(\int \frac{q(x)}{y_{hom}(x)}\,\mathrm{d}x\right) y_{hom}(x).$$

Für $|x| < 1$ ist

$$\int \frac{q(x)}{y_{hom}(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1-x^2}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x.$$

Für $|x| > 1$ hat man

$$\begin{aligned}\int \frac{q(x)}{y_{hom}(x)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{1-x^2}\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} \\ &= \begin{cases} -\mathrm{acosh} x = -\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right), & x > 1 \\ \mathrm{acos}(-x) = \ln\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right), & x < -1 \end{cases}\end{aligned}$$

Zusammengefasst ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{c+\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{definiert auf } (-1,1) \\ \dfrac{c-\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2-1}}, & \text{definiert auf } (1,\infty) \\ \dfrac{c+\ln\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2-1}}, & \text{definiert auf } (-\infty,-1) \end{cases}, \quad c \in \mathbb{R}.$$