KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
Institut für Analysis

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektro- und Informationstechnik

Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Tobias Ried, M.Sc.

Wintersemester 2013/14
Blatt 3 vom 21.11.13

http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm3etec2013w/

Übungsaufgaben

1. **Implizite Differentialgleichungen, I**
   (a) Bestimmen Sie die Lösungen folgender Anfangswertprobleme:
      (i) $y = (y')^2 \sin y'$ mit $y(0) = \frac{\pi^2}{72}$
      (ii) $x = (y')^3 + y'$ mit $y(2) = \frac{9}{4}$
      (iii) $y'' = 2y(1 + y^2)$ mit $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
   (b) Finden Sie alle Lösungen der impliziten Differentialgleichung $(y'')^2 + xy'' - y' = 0$.
   Hinweis: Es kann hilfreich sein, zunächst $u = y'$ zu substituieren.

2. **Implizite Differentialgleichungen, II**

   Betrachten Sie die Differentialgleichung
   $$y(x) = \tfrac{1}{2}x^2 - xy'(x) + (y'(x))^2.$$
   (a) Bestimmen Sie die Lösungen dieser Differentialgleichung.
   (b) Für welche Paare (x_0, y_0) gibt es eine Lösung, die $y(x_0) = y_0$ erfüllt?
   (c) Für welche Werte (x_0, y_0) aus (b) ist die Lösung mit $y(x_0) = y_0$ eindeutig?

3. **Zusatzaufgabe: Clairaut-Differentialgleichung**

   Betrachten Sie die Clairaut-Differentialgleichung $y = xy' + g(y')$ mit auf einem Intervall stetig differenzierbaren Funktion g.

   (a) Finden Sie eine Lösungskurve in Parameterform, sowie alle Lösungsgeraden der Differentialgleichung. Wie hängen diese beiden Lösungstypen zusammen?
   (b) Lösen Sie den konkreten Fall $g = \exp$ und diskutieren Sie das Ergebnis.

4. **Exakte Differentialgleichungen**
   (a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung
   $$2x \sin y \,\mathrm{d}x + x^2 \cos y \,\mathrm{d}y = 0$$
   exakt ist und bestimmen Sie die allgemeine Lösung in impliziter Form.
   (b) Geben Sie eine Lösung der Differentialgleichung durch $y(1) = \frac{9\pi}{4}$ in expliziter Form an.
   (c) Ist die Lösung aus (b) in einer (kleinen) Umgebung von $x = 1$ eindeutig?

5. **Integrierende Faktoren**

   Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung
   $$x^2 + y^2 + 1 - 2xyy' = 0$$
   nicht exakt ist und finden Sie einen integrierenden Faktor der Form $\mu(x, y) = \rho(x^2 - y^2)$. Geben Sie damit alle Lösungen der Differentialgleichung (in impliziter Form) an.

Besprechung der Übungsaufgaben: Freitag, 29.11.2013