

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektro- und Informationstechnik

DR. ANDREAS MÜLLER-RETTKOWSKI

Wintersemester 2013/14

TOBIAS RIED, M.Sc.

Blatt 3 vom 29.11.2013

<http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm3etec2013w/>

Lösungsvorschläge

1. Implizite Differentialgleichungen, I

(a) Bestimmen Sie die Lösungen folgender Anfangswertprobleme:

(i) $y = (y')^2 \sin y'$ mit $y(0) = \frac{\pi^2}{72}$

(ii) $x = (y')^3 + y'$ mit $y(2) = \frac{9}{4}$

(iii) $y'' = 2y(1 + y^2)$ mit $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

(b) Finden Sie alle Lösungen der impliziten Differentialgleichung $(y'')^2 + xy'' - y' = 0$.

HINWEIS: Es kann hilfreich sein, zunächst $u = y'$ zu substituieren.

LÖSUNG:

(a) (i) Sei $x = \varphi(t), y = \chi(t)$ eine Parameterdarstellung (parametrisiert durch $t = y'$) der Lösung. Dann gilt (vgl. Vorlesung Kapitel 4)

$$\chi(t) = t^2 \sin t \quad (1)$$

$$\dot{\chi}(t) = t\dot{\varphi}(t) \quad (2)$$

mit Anfangsbedingungen

$$\chi(t_0) = \frac{\pi^2}{72} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}\right)^2, \quad \varphi(t_0) = 0.$$

Wegen $\sin \frac{\pi}{6} = 1$ gilt also gemäß (1), dass $t_0 = \frac{\pi}{6}$ und aus (2) folgt

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \int_{t_0}^t \frac{\dot{\chi}(s)}{s} ds = \int_{\frac{\pi}{6}}^t \frac{2s \sin s + s^2 \cos s}{s} ds = [-2 \cos s + s \sin s + \cos s]_{\frac{\pi}{6}}^t \\ &= -\cos t + t \sin t + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

Man überprüft leicht, dass Geraden $y(x) = ax + b$ nicht als Lösungen der Differentialgleichung in Frage kommen, denn die Gleichung $ax + b = a^2 \sin a$ ist nur für $a = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllbar. Die Funktion $y \equiv 0$ erfüllt jedoch nicht die Anfangsbedingung, kann daher als Lösung ausgeschlossen werden.

(ii) Bezeichne wieder $x = \varphi(t), y = \chi(t)$ eine Parameterdarstellung (parametrisiert durch $t = y'$) der Lösung. Es gilt

$$\varphi(t) = t^3 + t \quad (3)$$

$$\dot{\chi}(t) = t\dot{\varphi}(t) = 3t^3 + t. \quad (4)$$

Aus der Anfangsbedingung erhält man $\varphi(t_0) = 2$ und $\chi(t_0) = \frac{9}{4}$, also $t_0 + t_0^3 = 2$ mit der (einzigen reellen) Lösung $t_0 = 1$. Damit gilt $\chi(1) = \frac{9}{4}$ und

$$\begin{aligned} \chi(t) &= \chi(t_0) + \int_{t_0}^t s\dot{\varphi}(s) ds = \frac{9}{4} + \int_1^t (3s^3 + s) ds \\ &= \frac{9}{4} + \frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^2 + 1. \end{aligned}$$

Auch hier sieht man schnell, dass Geraden keine Lösungen sind, da die Gleichung $x = a^3 + a$ für feste Wahl von $a \in \mathbb{R}$ nicht für alle x erfüllt sein kann.

(iii) Diese implizite Differentialgleichung ist vom Typ $F(y, y', y'') = 0$ mit

$$F(y, p, q) = q - 2y(1 + y^2).$$

Löst die Funktion p die Gleichung $F(t, p(t), \dot{p}(t)p(t)) = 0$ und genügt $y = \varphi(x)$ der Differentialgleichung $y' = p(y)$, so ist laut Vorlesung $y = \varphi(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung $F(y, y', y'') = 0$.

Man löse daher zunächst

$$F(t, p(t), \dot{p}(t)p(t)) = \dot{p}(t)p(t) - 2t(1 + t^2) = 0,$$

also

$$\dot{p}(t)p(t) = 2t(1 + t^2) \Leftrightarrow (p^2(t))' = 4t(1 + t^2)$$

Diese Gleichung lässt sich leicht aufintegrieren,

$$p^2(t) = \int 4t(1 + t^2) dt = 2t^2 + t^4 = t^2(2 + t^2) + C, \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \\ p(t) = \pm \sqrt{2t^2 + t^4 + C}.$$

Die Lösung der Differentialgleichung findet man durch Lösen der Differentialgleichung

$$y' = p(y) = \pm \sqrt{2y^2 + y^4 + C}$$

. Wegen $y'(0) = 1$ muss gelten $y' = \sqrt{2y^2 + y^4 + C}$, die Konstante C ergibt sich dann aus $y'(0) = \sqrt{C} = 1$, also $C = 1$.

Dies führt auf das einfachere Anfangswertproblem

$$y' = \sqrt{2y^2 + y^4 + 1} = \sqrt{(1 + y^2)^2} = 1 + y^2, \quad y(0) = 0$$

vom Typ “getrennte Veränderliche”. Die Lösung erhält man aus

$$x = \int_0^x d\xi = \int_0^y \frac{d\eta}{1 + \eta^2} = \arctan \eta,$$

und damit $y(x) = \tan x$.

(b) Setzt man $y' = u$ wird die DGL zu

$$(u')^2 + xu' - u = 0,$$

welche vom Typ $F(x, u, u') = 0$ ist und wie in Aufgabenteil (a) behandelt werden kann.

(i) *Lösungsgeraden* sind gegeben durch

$$u(x) = ax + a^2, \quad a \in \mathbb{R},$$

und damit $y(x) = \frac{1}{2}ax^2 + a^2x + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

- (ii) Von Geraden verschiedene Lösungen erhält man in *Parameterform* $x = \varphi(t)$, $u = \chi(t)$ durch Lösen der Gleichungen

$$\chi(t) = t^2 + t\varphi(t) \quad (5)$$

$$\dot{\chi}(t) = t\dot{\varphi}(t) \quad (6)$$

Differentiation von Gleichung (5) liefert in Kombination mit (6)

$$t\dot{\varphi}(t) = \dot{\chi}(t) = 2t + t\dot{\varphi}(t) + \varphi(t),$$

also $x = \varphi(t) = -2t$, und damit $u = \chi(t) = t^2 + t\varphi(t) = -t^2$. Durch Elimination von t erhält man

$$u(x) = -\frac{x^2}{4} = y'(x)$$

und daher

$$y(x) = -\frac{x^3}{12} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

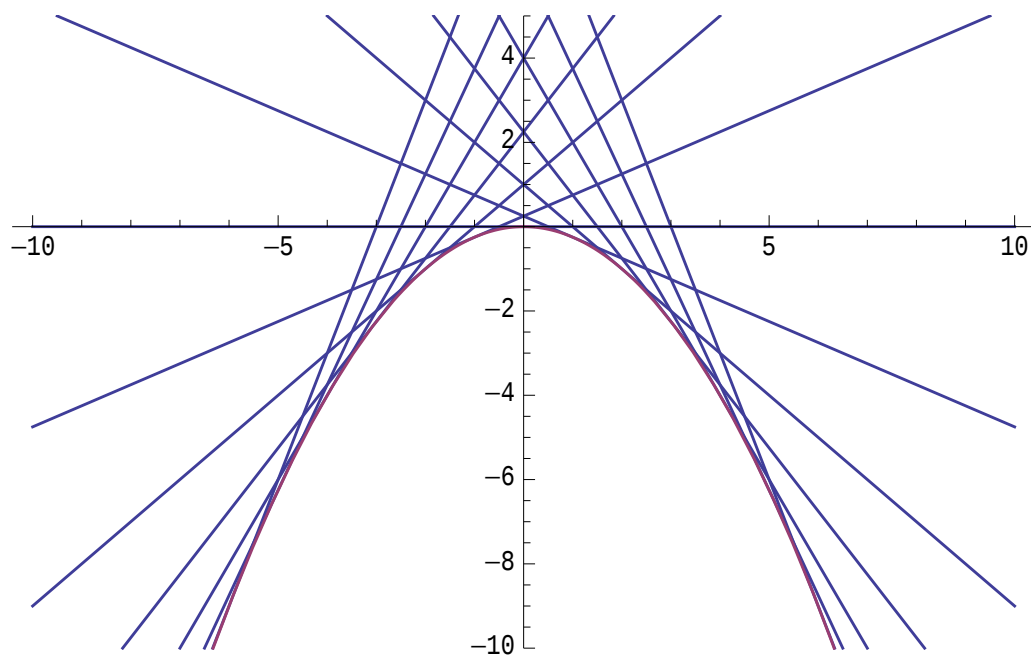


Abbildung 1: Die Lösungen u der Differentialgleichung aus Aufgabe 1 (b) für $b = c = 0$. Die Geradenschar bildet eine Tangentenschar an die Kurve $u(x) = -\frac{x^2}{4}$, welche als Envelope der Geradenschar bezeichnet wird.

2. Implizite Differentialgleichungen, II

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 - xy'(x) + (y'(x))^2.$$

- (a) Bestimmen Sie die Lösungen dieser Differentialgleichung.
- (b) Für welche Paare (x_0, y_0) gibt es eine Lösung, die $y(x_0) = y_0$ erfüllt?
- (c) Für welche Werte (x_0, y_0) aus (b) ist die Lösung mit $y(x_0) = y_0$ eindeutig?

LÖSUNG:

- (a) (i) *Lösungsgeraden*: setzt man $y(x) = ax + b$ in die Differentialgleichung ein, erhält man

$$ax + b = \frac{1}{2}x^2 - ax + a^2.$$

Keine Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ können dies für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllen.

- (ii) *Lösungen in Parameterdarstellung*: von Geraden verschiedene Lösungen erhält man aus der Parameterdarstellung $x = \varphi(t)$, $y = \chi(t)$ durch Lösen der Gleichungen

$$\chi(t) = \frac{1}{2}\varphi(t)^2 - t\varphi(t) + t^2 \quad (7)$$

$$\dot{\chi}(t) = t\dot{\varphi}(t) \quad (8)$$

Ableiten von Gleichung (7) liefert

$$\dot{\chi}(t) = \dot{\varphi}(t)\varphi(t) - t\dot{\varphi}(t) - \varphi(t) + 2t,$$

und eingesetzt in (8)

$$t\dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}(t)\varphi(t) - t\dot{\varphi}(t) - \varphi(t) + 2t,$$

bzw.

$$(\varphi(t) - 2t)(\dot{\varphi}(t) - 1) = 0.$$

Zum Lösen dieser Gleichung werden die folgenden beiden Fälle betrachtet:

Fall 1. $\varphi(t) = 2t$. In diesem Fall ist insbesondere $\dot{\varphi}(t) = 2 \neq 0$. Es folgt sofort (entweder aus (7) oder aus (8))

$$\chi(t) = t^2 = \frac{1}{4}(\varphi(t))^2.$$

Damit ist aber die Funktion

$$y(x) = \frac{1}{4}x^2 \quad (9)$$

Lösung der Differentialgleichung.

Fall 2. $\dot{\varphi}(t) = 1$. Dann folgt $\varphi(t) = t + c$ mit $c \in \mathbb{R}$. Eingesetzt in Gleichung (7) erhält man

$$\chi(t) = \frac{1}{2}(t + c)^2 - (t + c)t + t^2 = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}c^2.$$

Substituiert man $t = \varphi(t) - c = x - c$, ergibt das die Lösung

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 - x(x - c) + (x - c)^2 = \frac{1}{2}x^2 - cx + c^2, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (10)$$

(b) **Fall 1.** Durch $y(x) = \frac{1}{4}x^2$ ist genau dann eine Lösung mit $y(x_0) = y_0$ gegeben, wenn $y_0 = \frac{1}{4}x_0^2$.

Fall 2. Hier ist $y(x) = \frac{1}{2}x^2 - cx + c^2$, die Bedingung $y(x_0) = y_0$ also erfüllbar, falls die quadratische Gleichung

$$\frac{1}{2}x_0^2 - cx_0 + c^2 = y_0, \quad \text{bzw.} \quad c^2 - x_0c + (\frac{1}{2}x_0^2 - y_0) = 0 \quad (11)$$

in c lösbar ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $x_0^2 - 4(\frac{1}{2}x_0^2 - y_0) \geq 0$, oder äquivalent $y_0 \geq \frac{1}{4}x_0^2$.

Zusammenfassend ist das Anfangswertproblem mit $y(x_0) = y_0$ lösbar, falls $y_0 \geq \frac{1}{4}x_0^2$.

(c) Ist $y_0 = \frac{1}{4}x_0^2$, so sind $y(x) = \frac{1}{4}x^2$ und $y(x) = \frac{1}{2}x^2 - cx + c^2$ mit $c = \frac{1}{2}x_0$ Lösungen.

Falls $y_0 > \frac{1}{4}x_0^2$, besitzt die quadratische Gleichung (11) zwei verschiedene Lösungen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, und die Funktionen $y_k(x) = \frac{1}{2}x^2 - c_kx + c_k^2$ ($k = 1, 2$) sind zwei voneinander verschiedene Lösungen des Anfangswertproblems.

Das Anfangswertproblem ist also *nie* eindeutig lösbar.

3. Zusatzaufgabe: Clairaut-Differentialgleichung

Betrachten Sie die Clairaut-Differentialgleichung $y = xy' + g(y')$ mit auf einem Intervall stetig differenzierbaren Funktion g .

- (a) Finden Sie eine Lösungskurve in Parameterform, sowie alle Lösungsgeraden der Differentialgleichung. Wie hängen diese beiden Lösungstypen zusammen?
- (b) Lösen Sie den konkreten Fall $g = \exp$ und diskutieren Sie das Ergebnis.

LÖSUNG:

- (a) Sei $g \in \mathcal{C}^1(J)$, $J \subset \mathbb{R}$ Intervall. Parametrisiert man $x = \varphi(t)$, $y = \chi(t)$, so muss gelten

$$\chi(t) = t\varphi(t) + g(t) \quad (12)$$

$$\dot{\chi}(t) = t\dot{\varphi}(t) \quad (13)$$

Differentiation von Gleichung (12) nach t liefert

$$\dot{\chi}(t) = \varphi(t) + t\dot{\varphi}(t) + \dot{g}(t)$$

und zusammen mit (13) erhält man

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= -\dot{g}(t) \\ \chi(t) &= -t\dot{g}(t) + g(t) \end{aligned} \quad (14)$$

als Lösung der Differentialgleichung in Parameterform. Ist g sogar zweimal stetig differenzierbar auf J , gilt $\varphi, \chi \in \mathcal{C}^1(J)$. Gilt weiter $\ddot{g} \neq 0$ in J , so ist $\dot{\varphi} \neq 0$ in J und die Kurve besitzt eine explizite Darstellung der Form

$$y = \Psi(x) \quad \text{mit stetig differenzierbarem } \Psi. \quad (15)$$

Man rechnet leicht nach, dass alle Geraden

$$y(x) = cx + g(c), \quad c \in J \quad (16)$$

Lösungen der Differentialgleichung sind.

Für einen festen Parameterwert $t = c$ liegt der Kurvenpunkt $(\varphi(c), \chi(c))$ von (14) auf der Geraden (16), denn

$$c\varphi(c) + g(c) = -c\dot{g}(c) + g(c) = \chi(c).$$

In diesem Punkt hat die Kurve die Steigung

$$\frac{\dot{\chi}(c)}{\dot{\varphi}(c)} = \frac{-\dot{g}(c) - c\ddot{g}(c) + \dot{g}(c)}{-\ddot{g}(c)} = c,$$

stimmt also mit der Steigung der Geraden durch diesen Punkt überein. Die Geradenschar (16) bilden also eine Tangentenschar an die Kurve (14), welche als *Envelope* der Geradenschar bezeichnet wird.

Unter den Voraussetzungen an g ist jede Lösung der Differentialgleichung gegeben durch eine Gerade der Form (16), durch die Funktion y aus (15) oder einer Zusammensetzung aus Ψ und Geradenstücken von (16).

- (b) Ist konkret $g(t) = e^t$ für $t \in \mathbb{R}$, sind alle Voraussetzungen aus Aufgabenteil (a) erfüllt, insbesondere $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

Die Geraden $y(x) = cx + e^c$ sind für $c \in \mathbb{R}$ Lösungsgeraden, von Geraden verschiedene Lösungen werden parametrisiert durch

$$x = \varphi(t) = -e^t$$

$$y = \chi(t) = -te^t + e^t = e^t(1 - t).$$

Löst man die erste Gleichung nach t auf, also $t = \log(-x)$ für $x < 0$ und setzt dies in die zweite Gleichung ein, erhält man

$$y(x) = -x(1 - \log(-x)) = x(\log(-x) - 1).$$

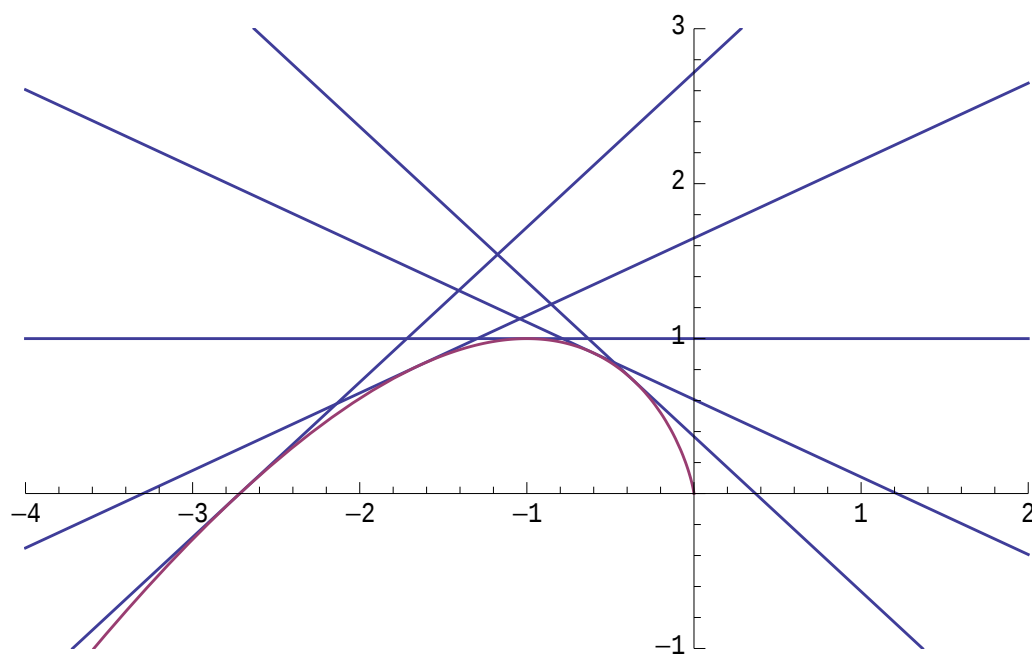


Abbildung 2: Lösungsgeraden und deren Envelope der Differentialgleichung $y = xy' + \exp(y')$.

4. Exakte Differentialgleichungen

- (a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$2x \sin y \, dx + x^2 \cos y \, dy = 0$$

exakt ist und bestimmen Sie die allgemeine Lösung in impliziter Form.

- (b) Geben Sie eine Lösung der Differentialgleichung durch $y(1) = \frac{9\pi}{4}$ in expliziter Form an.
(c) Ist die Lösung aus (b) in einer (kleinen) Umgebung von $x = 1$ eindeutig?

LÖSUNG:

- (a) Definiere $f(x, y) = 2x \sin y$ und $g(x, y) = x^2 \cos y$. Offenbar sind $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ und damit die Differentialgleichung

$$f(x, y) \, dx + g(x, y) \, dy = 0$$

exakt, falls $D_2 f(x, y) = D_1 g(x, y)$. Dies ist hier der Fall, denn

$$D_2 f(x, y) = 2x \cos y, \quad D_1 g(x, y) = 2x \cos y.$$

Die Lösungen der Differentialgleichung sind Höhenlinien eines Potentials H des Vektorfelds $v = (f, g)^T$. Das Potential lässt sich aus $D_1 H = f$ und $D_2 H = g$ bestimmen. Die erste Gleichung liefert

$$H(x, y) = \int f(x, y) \, dx + C_1(y) = x^2 \sin y + C_1(y),$$

aus der zweiten erhält man

$$H(x, y) = \int g(x, y) \, dy + C_2(x) = x^2 \sin y + C_2(x).$$

Eine Potentialfunktion ist also $H(x, y) = x^2 \sin y$, und Lösungen der Differentialgleichung sind implizit gegeben durch

$$H(x, y(x)) = x^2 \sin y(x) = C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (17)$$

- (b) Gesucht ist eine Auflösung der Gleichung für die Höhenlinie, die durch $(1, \frac{9\pi}{4})$ läuft, nach $y(x)$ (vgl. Abbildung 3). Setzt man $y(1) = \frac{9\pi}{4}$ in die Gleichung (17) ein, erhält man $C = 1^2 \sin \frac{9\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Wegen $\sin y \leq 1$, kann die Gleichung $x^2 \sin y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ nur für $x^2 \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ erfüllt sein. Es muss also $|x| \geq \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ gelten. Da $x_0 = 1 \in [\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \infty)$, erhält man zusammen mit $y(1) = \frac{9\pi}{4}$ die Lösung

$$y(x) = 2\pi + \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2x^2}\right) \quad \text{auf dem maximalen Intervall } [\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \infty).$$

- (c) Die Rechnung aus (b) zeigt bereits, dass y auf $[\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \infty)$ eindeutig bestimmt ist. Alternativ folgt wegen $D_2 H(1, \frac{9\pi}{4}) = g(1, \frac{9\pi}{4}) = \cos \frac{9\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0$ nach dem Satz über implizite Funktionen, dass $H(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ in einer kleinen Umgebung eindeutig nach y auflösbar ist.

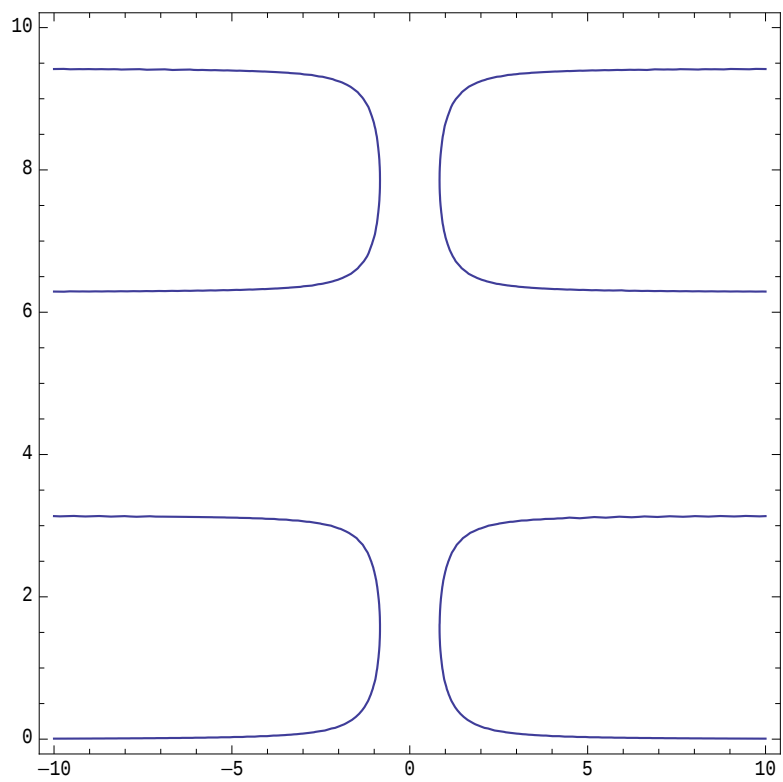


Abbildung 3: Die Höhenlinie $H(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ des Potentials H .

5. Integrierende Faktoren

Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$x^2 + y^2 + 1 - 2xyy' = 0$$

nicht exakt ist und finden Sie einen integrierenden Faktor der Form $\mu(x, y) = \rho(x^2 - y^2)$. Geben Sie damit alle Lösungen der Differentialgleichung (in impliziter Form) an.

LÖSUNG: Allgemeine Vorbemerkung.

Sei $\mu = \mu(x, y)$ ein integrierender Faktor für die DGL

$$f(x, y) dx + g(x, y) dy = 0, \quad (18)$$

d.h. die Differentialgleichung $\mu f dx + \mu g dy = 0$ ist exakt. μ genügt also der Differentialgleichung $D_2(\mu f) = D_1(\mu g)$. Ist nun ein integrierender Faktor der Form $\mu(x, y) = \rho(\psi(x, y))$ mit $\rho = \rho(t)$ gesucht, so muss gelten

$$D_2(\rho(\psi(x, y))f(x, y)) = D_1(\rho(\psi(x, y))g(x, y)).$$

Man hat (nach Ketten- und Produktregel)

$$\begin{aligned} D_2(\rho(\psi(x, y))f(x, y)) &= \rho'(\psi(x, y))D_2\psi(x, y)f(x, y) + \rho(\psi(x, y))D_2f(x, y) \\ D_1(\rho(\psi(x, y))g(x, y)) &= \rho'(\psi(x, y))D_1\psi(x, y)g(x, y) + \rho(\psi(x, y))D_1g(x, y) \end{aligned}$$

und damit als Bedingung für ρ

$$\rho'(\psi(x, y)) = \rho(\psi(x, y)) \frac{D_2f(x, y) - D_1g(x, y)}{g(x, y)D_1\psi(x, y) - f(x, y)D_2\psi(x, y)}. \quad (19)$$

Im konkreten Fall $x^2 + y^2 + 1 - 2xyy' = 0$ lässt sich die DGL schreiben in der Form (18) mit $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$, $g(x, y) = -2xy$. Die Bedingung (19) für ρ wird mit $\psi(x, y) = x^2 - y^2$ zu

$$\rho'(x^2 - y^2) = \rho(x^2 - y^2) \frac{2y + 2y}{-2xy(2x) + 2y(x^2 + y^2 + 1)} = \rho(x^2 - y^2) \frac{2}{1 - (x^2 - y^2)}.$$

Für $\rho = \rho(t)$ ist das die Differentialgleichung

$$\rho'(t) = \rho(t) \frac{2}{1 - t}$$

mit Lösung $\rho(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$. Der so bestimmte integrierende Faktor lautet also

$$\mu(x, y) = \rho(x^2 - y^2) = \frac{1}{(1 + y^2 - x^2)^2}.$$

Ein Potential $H = H(x, y)$ der jetzt exakten Differentialgleichung $\mu f dx + \mu g dy = 0$ ist

$$H(x, y) = \frac{x}{1 + y^2 - x^2},$$

die Lösungen der Differentialgleichung in impliziter Form also gegeben durch

$$\frac{x}{1 + y^2 - x^2} = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$