

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektro- und Informationstechnik

DR. ANDREAS MÜLLER-RETTKOWSKI

Wintersemester 2013/14

TOBIAS RIED, M.Sc.

Blatt 4 vom 06.12.2013

<http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm3etec2013w/>**Lösungsvorschläge****1. Zusatzaufgabe: Holomorphe Funktionen und Exaktheit**

Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ mit $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$. Welcher Gestalt muss f sein, damit die Differentialgleichung

$$u(x, y) dx + v(x, y) dy = 0$$

in $\mathbb{R}^2$ exakt ist?

LÖSUNG: Ist $f = u + iv$ in $\mathbb{C}$ holomorph, so gelten die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen im $\mathbb{R}^2$,

$$D_1 u = D_2 v \quad (1)$$

$$D_2 u = -D_1 v. \quad (2)$$

Die DGL $u dx + v dy = 0$ ist in $\mathbb{R}^2$ exakt, falls

$$D_2 u = D_1 v \quad (3)$$

gilt.

Aus Gleichungen (3) und (2) erhält man $D_2 u = -D_2 u$, also $D_2 u = 0$. Die Funktion u kann daher nur von x abhängen, $u = u(x)$. Gleichung (3) liefert dann $D_1 v = 0$, v kann also nur von y abhängen, $v = v(y)$. Aus (1) folgt

$$u'(x) = v'(y) = c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} u(x) &= cx + d_1 \\ v(y) &= cy + d_2 \end{aligned} \quad c, d_1, d_2 \in \mathbb{R},$$

und es gilt

$$f(x + iy) = c(x + iy) + d_1 + id_2$$

bzw.

$$f(z) = cz + d, \quad c \in \mathbb{R}, \quad d \in \mathbb{C}.$$

2. Zusatzaufgabe: Integrierende Faktoren

Seien μ_1 und μ_2 integrierende Faktoren für die Differentialgleichung

$$f(x, y) dx + g(x, y) dy = 0 \quad (4)$$

mit der Eigenschaft

$$\det \begin{pmatrix} D_1 \mu_1 & D_2 \mu_1 \\ D_1 \mu_2 & D_2 \mu_2 \end{pmatrix} (x, y) \neq 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (5)$$

Dann sind die Lösungen der Differentialgleichung (4) implizit durch Höhenlinien der Funktion $\frac{\mu_1}{\mu_2}$, also durch $\frac{\mu_1(x, y)}{\mu_2(x, y)} = \text{const.}$ gegeben.

LÖSUNG: Sind μ_1 und μ_2 integrierende Faktoren, so gilt $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 \neq 0$ und

$$D_2(\mu_1 f) = D_1(\mu_1 g) \quad (6)$$

$$D_2(\mu_2 f) = D_1(\mu_2 g). \quad (7)$$

Multipliziert man Gleichung (6) mit μ_2 und zieht das μ_1 -fache von (7) ab, erhält man

$$\mu_2 D_2(\mu_1 f) - \mu_1 D_2(\mu_2 f) = \mu_2 D_1(\mu_1 g) - \mu_1 D_1(\mu_2 g)$$

bzw. unter Anwendung der Produktregel

$$f \underbrace{(\mu_2 D_2 \mu_1 - \mu_1 D_2 \mu_2)}_{=:A} = g \underbrace{(\mu_2 D_1 \mu_1 - \mu_1 D_1 \mu_2)}_{=:B} \quad (8)$$

Man bemerke, dass wegen Bedingung (5) entweder $A \neq 0$ oder $B \neq 0$. Denn wäre $A = B = 0$, hätte man

$$\begin{aligned} \mu_2 D_2 \mu_1 &= \mu_1 D_2 \mu_2 \\ \mu_2 D_1 \mu_1 &= \mu_1 D_1 \mu_2 \end{aligned}$$

also

$$D_1 \mu_1 = \frac{\mu_1}{\mu_2} D_1 \mu_2, \quad \text{und} \quad D_2 \mu_1 = \frac{\mu_1}{\mu_2} D_2 \mu_2.$$

Dann würde aber

$$\det \begin{pmatrix} D_1 \mu_1 & D_2 \mu_1 \\ D_1 \mu_2 & D_2 \mu_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{\mu_1}{\mu_2} D_1 \mu_2 & \frac{\mu_1}{\mu_2} D_2 \mu_2 \\ D_1 \mu_2 & D_2 \mu_2 \end{pmatrix} = 0$$

gelten, da die Zeilen $(\frac{\mu_1}{\mu_2} D_1 \mu_2, \frac{\mu_1}{\mu_2} D_2 \mu_2)$ und $(D_1 \mu_2, D_2 \mu_2)$ linear abhängig sind, im Widerspruch zu Bedingung (5).

Aus Gleichung (8) folgt dann, dass $A \neq 0$ und $B \neq 0$ (zumindest wenn man $f \neq 0$, $g \neq 0$ annimmt).

Definiere nun $y = y(x)$ durch $\frac{\mu_1(x, y(x))}{\mu_2(x, y(x))} = \text{const.}$. Dann gilt für alle x

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\mu_1(x, y(x))}{\mu_2(x, y(x))} \right) = \frac{1}{\mu_2^2(x, y(x))} (A(x, y(x)) + y'(x) B(x, y(x))) \\ &= \frac{B(x, y(x))}{\mu_2^2(x, y(x))} \left(\frac{A(x, y(x))}{B(x, y(x))} + y'(x) \right) = \frac{B(x, y(x))}{\mu_2^2(x, y(x))} \left(\frac{f(x, y(x))}{g(x, y(x))} + y'(x) \right). \end{aligned}$$

Da $B \neq 0$ folgt $\frac{f}{g} + y' = 0$, also $f + gy' = 0$.