KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
Institut für Analysis

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektro- und Informationstechnik

Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Tobias Ried, M.Sc.

Wintersemester 2013/14
Blatt 5 vom 05.12.2013

http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm3etec2013w/

Übungsaufgaben

1. **Lösungsfundamentalsysteme linearer Differentialgleichugen**

   Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraumes der homogenen linearen Differentialgleichungen

   (a) $y^{(4)} + y''' - y'' + y' - 2y = 0$

   (b) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

2. **Der gedämpfte harmonische Oszillator**

   Die Auslenkung $x(t)$ eines gedämpften harmonischen Oszillators wird beschrieben durch die Differentialgleichung

   $$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0, \gamma > 0. \tag{1}$$

   Geben Sie alle Lösungen von (1) an. Unterscheiden Sie dabei die Fälle $\gamma < \omega_0$, $\gamma = \omega_0$, $\gamma > \omega_0$.

3. **Laplace-Transformation**

   Gegeben sei das Anfangswertproblem für die Funktion $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$

   $$\ddot{y}(t) + y(t) = f \cos(\omega t), \quad f \in \mathbb{R}, \quad y(0) = y_0, \dot{y}(0) = v_0. \tag{2}$$

   Es bezeichne $Y = \mathscr{L}(y)$ die Laplace-Transformierte von y, also

   $$Y(z) = \int_0^\infty e^{-zt} y(t)\,\mathrm{d}t.$$

   (a) Welcher Gleichung muss Y genügen, damit es sich um die Laplace-Transformierte einer Lösung des Anfangswertproblems (2) handelt.

   (b) Lösen Sie die Gleichung für Y im Fall $f = 0$.

   (c) Bestimmen Sie die Lösung y der Differentialgleichung (2) mit $y_0 = v_0 = 0$.

   Hinweis: Berechnen Sie die Laplace-Transformationen von $\cos(\omega t)$ und $\sin(\omega t)$.

4. **Zusatzaufgabe: Ableitung der Determinante**

   Sei $A(x) = (a_{jk}(x))_{j,k=1,\dots,n}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine (n, n)-Matrix aus auf $\mathbb{R}$ differenzierbaren Elementen a_{jk}. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

   $$f(x) = \det A(x).$$

5. **Zusatzaufgabe: Lineare Unabhängigkeit**

   Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ paarweise verschiedene komplexe Zahlen. Zeigen Sie, dass die Funktionen $u_j : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

   $$u_j(x) := e^{\lambda_j x}, \quad j = 1, \dots, n$$

   linear unabhängig sind.

Besprechung der Übungsaufgaben: Freitag, 13.12.2013