KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
Institut für Analysis

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektro- und Informationstechnik

Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Tobias Ried, M.Sc.

Wintersemester 2013/14
Blatt 5 vom 13.12.2013
http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm3etec2013w/

Lösungsvorschläge

1. **Lösungsfundamentalsysteme linearer Differentialgleichungen**

Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraumes der homogenen linearen Differentialgleichungen

(a) $y^{(4)} + y''' - y'' + y' - 2y = 0$

(b) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

Lösung:

(a) Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung ist

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^4 + \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 2) \\ &= (\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda^2 + 1) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda + \mathrm{i})(\lambda - \mathrm{i}) \end{aligned}$$

mit den jeweils einfachen Nullstellen $-2, 1, \pm\mathrm{i}$ (da es sich um ein reelles Polynom handelt, treten komplexe Nullstellen immer zusammen mit dem komplex Konjugierten auf). Eine (komplexe) Basis des Lösungsraums der homogenen Differentialgleichung ist daher

$$\{e^{-2t}, e^t, e^{\mathrm{i}t}, e^{-\mathrm{i}t}\},$$

eine reelle Lösungsbasis ist gegeben durch

$$\{e^{-2t}, e^t, \cos t, \sin t\}.$$

(b) Das charakteristische Polynom ist hier

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3$$

mit der dreifachen Nullstelle -1. Eine Basis des Lösungsraums ist

$$\{e^{-t}, te^{-t}, t^2e^{-t}\}.$$

2. **Der gedämpfte harmonische Oszillator**

Die Auslenkung $x(t)$ eines gedämpften harmonischen Oszillators wird beschrieben durch die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \omega_0, \gamma > 0. \tag{1}$$

Geben Sie alle Lösungen von (1) an. Unterscheiden Sie dabei die Fälle $\gamma < \omega_0$, $\gamma = \omega_0$, $\gamma > \omega_0$.

LÖSUNG: Das charakteristische Polynom der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung ist das quadratische Polynom

$$p_{\gamma,\omega_0}(\lambda) = \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2$$

mit Diskriminante $d = 4(\gamma^2 - \omega_0^2)$.

Fall 1: $\gamma < \omega_0$ (*schwache Dämpfung*).
In diesem Fall ist $d < 0$, die Nullstellen von p_{γ,ω_0} also gegeben durch

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \mathrm{i}\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Der Lösungsraum ist damit

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_0 = \operatorname{span}\left\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}\right\} &= \operatorname{span}\left\{e^{-\gamma t}e^{\mathrm{i}t\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}, e^{-\gamma t}e^{-\mathrm{i}t\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}\right\} \\ &= \operatorname{span}\left\{e^{-\gamma t}\sin\left(t\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\right), e^{-\gamma t}\cos\left(t\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\right)\right\},\end{aligned}$$

die Basisfunktionen sind gedämpfte harmonische Schwingungen mit der Frequenz $\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$.

Fall 2: $\gamma = \omega_0$ (*kritische Dämpfung*).
Hier gibt es die doppelte Nullstelle $\lambda = -\gamma$. Der Lösungsraum wird aufgespannt durch $e^{\lambda t}$ und die dazu linear unabhängige Funktion $te^{\lambda t}$. Man hat also

$$\mathscr{L}_0 = \operatorname{span}\left\{e^{-\gamma t}, te^{-\gamma t}\right\}.$$

Fall 3: $\gamma > \omega_0$ (*starke Dämpfung/Überdämpfung*). Im Fall starker Dämpfung gibt es zwei voneinander verschiedene reelle einfache Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

des charakteristischen Polynoms. Ein Lösungsfundamentalsystem ist

$$\left\{e^{-\left(\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\right)t}, e^{-\left(\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\right)t}\right\}. \tag{2}$$

Die verschiedenen Fälle sind in Abbildung 1 dargestellt.

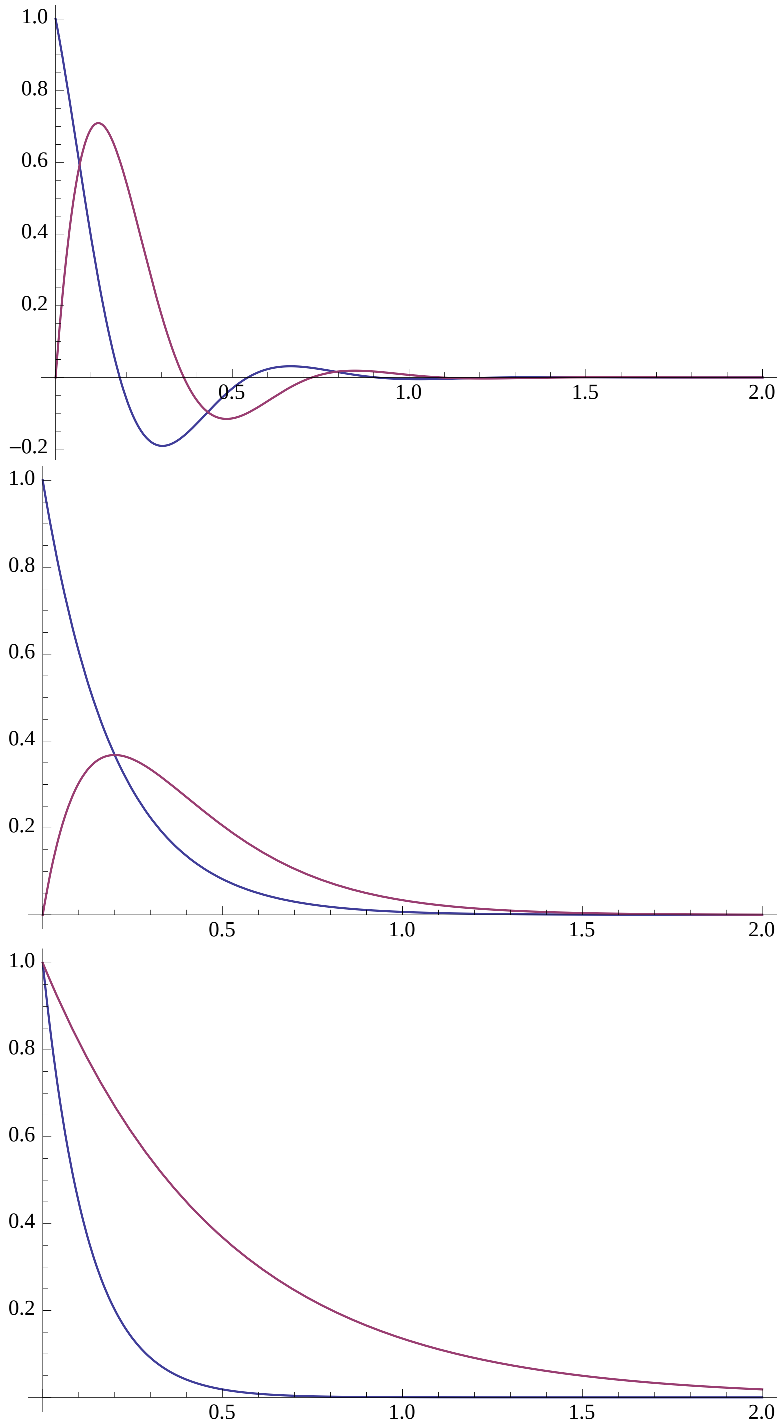

Abbildung 1: Die Fundamentallösungen der gedämpften homogenen Schwingungsgleichung in den verschiedenen Dämpfungsregimes.

3. Laplace-Transformation

Gegeben sei das Anfangswertproblem für die Funktion $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$

$$\ddot{y}(t) + y(t) = f \cos(\omega t), \quad f \in \mathbb{R}, \quad y(0) = y_0, \dot{y}(0) = v_0. \tag{3}$$

Es bezeichne $Y = \mathscr{L}(y)$ die Laplace-Transformierte von y, also

$$Y(z) = \int_0^\infty e^{-zt} y(t) \, \mathrm{d}t.$$

(a) Welcher Gleichung muss Y genügen, damit es sich um die Laplace-Transformierte einer Lösung des Anfangswertproblems (3) handelt.

(b) Lösen Sie die Gleichung für Y im Fall $f = 0$.

(c) Bestimmen Sie die Lösung y der Differentialgleichung (3) mit $y_0 = v_0 = 0$.

Hinweis: Berechnen Sie die Laplace-Transformationen von $\cos(\omega t)$ und $\sin(\omega t)$.

Lösung:

(a) Man berechne zunächst die relevanten Laplace-Transformationen:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(y)(z) &= \int_0^\infty e^{-zt} y(t) \, \mathrm{d}t = Y(z) \\
\mathscr{L}(\dot{y})(z) &= \int_0^\infty e^{-zt} \dot{y}(t) \, \mathrm{d}t = -y(0) + \int_0^\infty z e^{-zt} y(t) \, \mathrm{d}t = -y_0 + zY(z) \\
\mathscr{L}(\ddot{y})(z) &= \int_0^\infty e^{-zt} \ddot{y}(t) \, \mathrm{d}t = -\dot{y}(0) + z \left(\mathscr{L}(\dot{y})(z) \right) = -v_0 - zy_0 + z^2 Y(z) \\
\mathscr{L}(\cos(\omega t))(z) &= \int_0^\infty e^{-zt} \cos(\omega t) \, \mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-zt} \tfrac{1}{2} \left(e^{\mathrm{i}\omega t} + e^{-\mathrm{i}\omega t} \right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z - \mathrm{i}\omega} + \frac{1}{z + \mathrm{i}\omega} \right) = \frac{z}{z^2 + \omega^2} \\
\mathscr{L}(\sin(\omega t))(z) &= \int_0^\infty e^{-zt} \sin(\omega t) \, \mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-zt} \tfrac{1}{2\mathrm{i}} \left(e^{\mathrm{i}\omega t} - e^{-\mathrm{i}\omega t} \right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\mathrm{i}} \left(\frac{1}{z - \mathrm{i}\omega} - \frac{1}{z + \mathrm{i}\omega} \right) = \frac{\omega}{z^2 + \omega^2}
\end{aligned}$$

Somit lautet die Laplace-transformierte Gleichung

$$(z^2 + 1) Y(z) = \frac{fz}{z^2 + \omega^2} + v_0 + zy_0$$

und man erhält

$$Y(z) = \frac{fz}{(z^2 + 1)(z^2 + \omega^2)} + \frac{v_0}{z^2 + 1} + y_0 \frac{z}{z^2 + 1}$$

(b) Für $f = 0$ lautet die Laplace-Transformierte der Lösung

$$Y(z) = \frac{v_0}{z^2 + 1} + y_0 \frac{z}{z^2 + 1}.$$

Die Rücktransformierte ist offenbar

$$y(t) = v_0 \sin t + y_0 \cos t = \sqrt{y_0^2 + v_0^2} \cos \left(t - \phi \right)$$

mit der Phase $\phi = \arg(y_0 - \mathrm{i}v_0)$.

(c) Ist $f \neq 0$ und $y_0 = v_0 = 0$, so ergibt Partialbruchzerlegung für $\omega \neq 1$

$$
\begin{aligned}
Y_{\omega\neq 1}(z) = \frac{fz}{(z^2+1)(z^2+\omega^2)} &= \frac{Az+B}{z^2+1} + \frac{Cz+D}{z^2+\omega^2} \\
&= \frac{(Az+B)(z^2+\omega^2) + (Cz+D)(z^2+1)}{(z^2+1)(z^2+\omega^2)} \\
&= \frac{(A+C)z^3 + (B+D)z^2 + (A\omega^2+C)z + (B\omega^2+D)}{(z^2+1)(z^2+\omega^2)},
\end{aligned}
$$

also $C = -A$, $D = -B$, $A = \frac{f}{\omega^2-1}$, $B = 0$.
Damit hat man

$$
Y_{\omega\neq 1}(z) = \frac{f}{\omega^2-1}\left(\frac{z}{z^2+1} - \frac{z}{z^2+\omega^2}\right)
$$

mit Rücktransformation (siehe Liste in (a))

$$
y_{\omega\neq 1}(t) = \frac{f}{\omega^2-1}(\cos t - \cos\omega t) = \frac{2f}{\omega^2-1}\sin\bar{\omega}t\sin\Delta\omega t.
$$

Dies ist die Superposition zweier gegenphasiger harmonischer Schwingungen mit gleicher Amplitude und Frequenzen ω (Anregungsfrequenz) und 1 (Eigenfrequenz des Oszillatorsystems), und kann als Schwebung geschrieben werden mit $\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega+1)$, $\Delta\omega = \frac{1}{2}(\omega-1)$.
Für $\omega = 1$ ist $Y_{\omega=1}(z) = \frac{fz}{(z^2+1)^2}$, und die inverse Laplace-Transformation muss direkt über die Formel für die Rücktransformierte berechnet werden,

$$
y_{\omega=1}(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} e^{zt}Y_{\omega=1}(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}R}^{c+\mathrm{i}R} e^{zt}Y_{\omega=1}(z)\,\mathrm{d}z,
$$

wobei der Integrationsweg in der komplexen Ebene entlang der parallelen $\mathrm{Re}z = c$ zur imaginären Achse so gewählt ist, dass $c > 0$ größer als der Realteil sämtlicher Polstellen von $Y_{\omega=1}$ ist.
$Y_{\omega=1} = \frac{fz}{(z^2+1)^2} = \frac{fz}{(z+\mathrm{i})^2(z-\mathrm{i})^2}$ besitzt die beiden Polstellen zweiter Ordnung $\pm\mathrm{i}$. Schließt man den Integrationsweg durch Hinzufügen eines Halbkreises mit Radius R links von $(c-\mathrm{i}R, c+\mathrm{i}R)$ (Abbildung 2), trägt dieser Hilfsweg im Limes $R\to\infty$ nichts zum Wert des Integrals bei (siehe HMII), und nach dem Residuensatz gilt dann

$$
\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} e^{zt}Y_{\omega=1}(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{Res}_{\mathrm{i}}\left(e^{zt}Y_{\omega=1}(z)\right) + \mathrm{Res}_{-\mathrm{i}}\left(e^{zt}Y_{\omega=1}(z)\right).
$$

Da es sich jeweils um Pole zweiter Ordnung handelt, erhält man

$$
\mathrm{Res}_{\pm\mathrm{i}}\left(e^{zt}Y_{\omega=1}(z)\right) = \lim_{z\to\pm\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(e^{zt}Y_{\omega=1}(z)(z\mp\mathrm{i})^2\right) = f\frac{\mp\mathrm{i}t}{4}e^{\pm\mathrm{i}t}
$$

und damit

$$
y_{\omega=1}(t) = f\left(\frac{\mathrm{i}t}{4}e^{-\mathrm{i}t} + \frac{-\mathrm{i}t}{4}e^{\mathrm{i}t}\right) = f\frac{t}{2}\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}t} - e^{-\mathrm{i}t}\right) = f\frac{t}{2}\sin t.
$$

Die Lösung der Differentialgleichung ist also im Gegensatz zu $\omega \neq 1$ unbeschränkt für $t\to\infty$ (Resonanzkatastrophe).

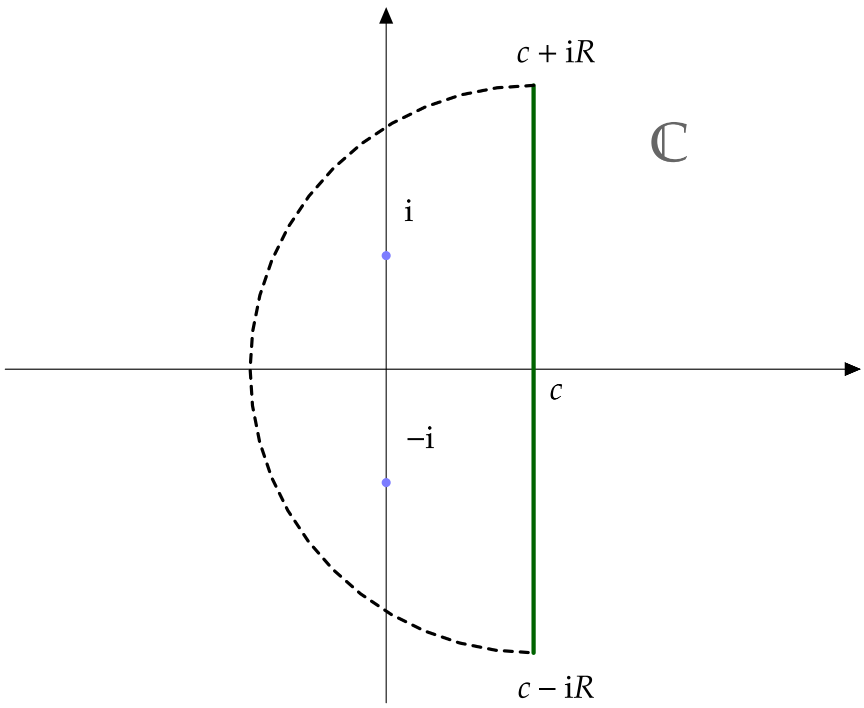

Abbildung 2: Der Integrationsweg bei der Berechnung der inversen Laplace-Transformation.

4. **Zusatzaufgabe: Ableitung der Determinante**

Sei $A(x) = (a_{jk}(x))_{j,k=1,\dots,n}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine (n,n)-Matrix aus auf $\mathbb{R}$ differenzierbaren Elementen a_{jk}. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f(x) = \det A(x).$$

LÖSUNG:

Schreibe $A(x) = \left(\vec{a}_1(x), \vec{a}_2(x), \dots, \vec{a}_n(x)\right)$ mit Spaltenvektoren $\vec{a}_k(x)$, $k = 1, \dots, n$. Man erinnere sich, dass die Determinante eine multilineare Funktion in den Spalten einer Matrix ist. Es ist $f(x) = \det A(x) = \det\left(\vec{a}_1(x), \vec{a}_2(x), \dots, \vec{a}_n(x)\right)$ und damit

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[f(x+h) - f(x)\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\det\left(\vec{a}_1(x+h), \vec{a}_2(x+h), \dots, \vec{a}_n(x+h)\right) - \det\left(\vec{a}_1(x), \vec{a}_2(x), \dots, \vec{a}_n(x)\right)\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big[\det\left(\vec{a}_1(x+h) - \vec{a}_1(x), \vec{a}_2(x+h), \vec{a}_3(x+h), \dots, \vec{a}_n(x+h)\right) \\
&\qquad\quad + \det\left(\vec{a}_1(x), \vec{a}_2(x+h) - \vec{a}_2(x), \vec{a}_3(x+h), \dots, \vec{a}_n(x+h)\right) \\
&\qquad\quad + \det\left(\vec{a}_1(x), \vec{a}_2(x), \vec{a}_3(x+h) - \vec{a}_3(x), \vec{a}_4(x+h) \dots, \vec{a}_n(x+h)\right) \\
&\qquad\quad + \cdots + \det\left(\vec{a}_1(x), \vec{a}_2(x), \dots, \vec{a}_{k-1}(x), \vec{a}_k(x+h) - \vec{a}_k(x), \vec{a}_{k+1}(x+h), \dots, \vec{a}_n(x+h)\right) \\
&\qquad\quad + \cdots + \det\left(\vec{a}_1(x), \vec{a}_2(x), \dots, \vec{a}_{n-1}(x), \vec{a}_n(x+h) - \vec{a}_n(x)\right)\Big] \\
&= \det\left(\vec{a}_1'(x), \vec{a}_2(x), \dots, \vec{a}_n(x)\right) + \det\left(\vec{a}_1(x), \vec{a}_2'(x), \dots, \vec{a}_n(x)\right) + \cdots + \det\left(\vec{a}_1(x), \vec{a}_2(x), \dots, \vec{a}_n'(x)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \det\left(\vec{a}_1(x), \dots, \vec{a}_{k-1}(x), \vec{a}_k'(x), \vec{a}_{k+1}(x), \dots, \vec{a}_n(x)\right)
\end{aligned}$$

5. **Zusatzaufgabe: Lineare Unabhängigkeit**

   Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ paarweise verschiedene komplexe Zahlen. Zeigen Sie, dass die Funktionen $u_j : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$u_j(x) := e^{\lambda_j x}, \quad j = 1, \dots, n$$

   linear unabhängig sind.

   LÖSUNG:

   Sei $c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x} = 0$ für $x \in \mathbb{R}$, $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$. Zu zeigen ist $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

   Wir gehen induktiv vor. Für $n = 1$ impliziert $c_1 e^{\lambda_1 x} = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dass $c_1 = 0$.

   Induktionsschluss $n - 1 \to n$: Sei $c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x} = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Dies lässt sich auch schreiben als

$$c_1 + c_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} + \cdots + c_n e^{(\lambda_n - \lambda_1)x} = 0 \tag{$\bullet$}$$

   Differentiation nach x liefert

$$\sum_{k=2}^{n} c_k (\lambda_k - \lambda_1) e^{(\lambda_k - \lambda_1)x} = 0.$$

   Nach Induktionsvoraussetzung ist dann $c_k(\lambda_k - \lambda_1) = 0$ für alle $k = 2, \dots, n$. Da die λ_k's paarweise verschieden sind, gilt $\lambda_k \neq \lambda_1$ für $k = 2, \dots, n$, und es folgt

$$c_2 = c_3 = \cdots = c_n = 0.$$

   Setzt man das in Gleichung ($\bullet$) ein, erhält man $c_1 e^{\lambda_1 x} = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und damit $c_1 = 0$. $\square$