

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektro- und Informationstechnik

DR. ANDREAS MÜLLER-RETTKOWSKI

TOBIAS RIED, M.Sc.

<http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm3etec2013w/>

Wintersemester 2013/14

Blatt 5 $\frac{1}{2}$ vom 20.12.2013

Lösungsvorschläge

1. Integrierender Faktor, II

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen, indem Sie einen integrierenden Faktor μ der angegebenen Form bestimmen.

(a) $(3xy^3 - 4xy + y)y' + y^4 - 2y^2 = 0$, $\mu(x, y) = \rho(x^\alpha y^\beta)$, mit geeignetem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(b) $xy^2 + y - (x \ln x)y' = 0$, $\mu(x, y) = \frac{1}{x}y^\alpha$, mit geeignetem $\alpha \in \mathbb{R}$.

LÖSUNG:

(a) In Übungsblatt 3 wurde bewiesen, dass die Funktion $\rho(\psi(x, y))$, im vorliegenden Fall $\psi(x, y) = x^\alpha y^\beta$, der Differentialgleichung

$$\rho'(\psi(x, y)) = \rho(\psi(x, y)) \frac{D_2 f(x, y) - D_1 g(x, y)}{g(x, y)D_1 \psi(x, y) - f(x, y)D_2 \psi(x, y)}. \quad (1)$$

genügen muss (f, g aus der Differentialgleichung $f dx + g dy = 0$, hier $f(x, y) = y^4 - 2y^2$, $g(x, y) = 3xy^3 - 4xy + y$).

Damit wird (1) zu

$$\begin{aligned} \rho'(x^\alpha y^\beta) &= \rho(x^\alpha y^\beta) \frac{4y^3 - 4y - 3y^3 + 4y}{\alpha x^{\alpha-1} y^\beta (3xy^3 - 4xy + y) - \beta y^{\beta-1} x^\alpha (y^4 - 2y^2)} \\ &= \rho(x^\alpha y^\beta) \frac{1}{x^\alpha y^\beta (3\alpha - \beta) + x^\alpha y^{\beta-2} (2\beta - 4\alpha) + \alpha x^{\alpha-1} y^{\beta-2}} \end{aligned}$$

Der Ansatz ist also nur dann sinnvoll, wenn $x^\alpha y^{\beta-2} (2\beta - 4\alpha)$ und $\alpha x^{\alpha-1} y^{\beta-2}$ konstant sind oder verschwinden.

Fall 1: $2\beta - 4\alpha = 0$ und $\alpha = 0$. Dies ist nur für $\alpha = \beta = 0$ erfüllbar und somit nicht relevant.

Fall 2: $\alpha x^{\alpha-1} y^{\beta-2}$ konstant ($\neq 0$) und $x^\alpha y^{\beta-2} (2\beta - 4\alpha)$ konstant ($\neq 0$). Diese Bedingungen sind gleichzeitig nicht erfüllbar.

Fall 3: $2\beta - 4\alpha = 0$ und $\alpha x^{\alpha-1} y^{\beta-2}$ konstant ($\neq 0$). Dies ist genau dann erfüllt wenn $\alpha = 1$ und $\beta = 2$. Dann gilt $\alpha x^{\alpha-1} y^{\beta-2} = 1$ und eingesetzt in die DGL für ρ erhält man

$$\rho'(xy^2) = \rho(xy^2) \frac{1}{xy^2 + 1}$$

also $\rho'(t) = \rho(t) \frac{1}{1+t}$ mit der Lösung (Trennung der Variablen) $\rho(t) = 1 + t$.

Ein integrierender Faktor ist damit $\mu_1(x, y) = 1 + xy^2$.

Fall 4: $\alpha = 0$ und $x^\alpha y^{\beta-2}(2\beta - 4\alpha) = 2\beta y^{\beta-2}$ konstant ($\neq 0$). Damit muss $\beta = 2$ gelten und man hat

$$\rho'(y^2) = \rho(y^2) \frac{1}{4 - 2y^2}$$

bzw. $\rho'(t) = \rho(t) \frac{1}{4-2t}$ mit der Lösung (Trennung der Variablen) $\rho(t) = \frac{1}{\sqrt{4-2t}}$.

Ein weiterer integrierender Faktor ist also gegeben durch

$$\mu_2(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4 - 2y^2}}.$$

Mit Blatt 4 Aufgabe 2 folgt dann¹, dass die Lösungen der Differentialgleichung gegeben sind durch

$$\frac{\mu_1(x, y)}{\mu_2(x, y)} = (1 + xy^2)\sqrt{4 - 2y^2} = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ferner ist $y \equiv 0$ eine triviale Lösung der DGL, welche in dieser Darstellung nicht enthalten ist (sie ist beim Teilen durch y^3 verloren gegangen).

- (b) Hier ist $f(x, y) = xy^2 + y$ und $g(x, y) = -x \ln x$. Damit $\mu(x, y) = \frac{1}{x} y^\alpha$ ein integrierender Faktor für die angegebene DGL ist, muss $D_2(\mu f) = D_1(\mu g)$ gelten, also

$$\begin{aligned} D_2(y^{\alpha+2} + \frac{1}{x} y^{\alpha+1}) &= D_1(-y^\alpha \ln x) \\ y^\alpha \left[(\alpha + 2)y + (\alpha + 1) \frac{1}{x} \right] &= -\frac{1}{x} y^\alpha \\ y^\alpha \left[(\alpha + 2) \left(y + \frac{1}{x} \right) \right] &= 0 \end{aligned}$$

für $x > 0$. Nimmt man an, dass $y \neq 0$ ($y = 0$ ist triviale Lösung der DGL), so ist diese Gleichung für $\alpha = -2$ erfüllbar. In diesem Fall ist also

$$\mu(x, y) = \frac{1}{xy^2}$$

integrierender Faktor. Die DGL wird nach Multiplikation mit μ zu

$$1 + \frac{1}{xy} - \frac{1}{y^2} (\ln x) y' = 0.$$

Ein Potential $H = H(x, y)$ zu dieser exakten DGL berechnet man aus

$$D_1 H(x, y) = (\mu f)(x, y) = 1 + \frac{1}{xy}, \quad D_2 H(x, y) = (\mu g)(x, y) = -\frac{1}{y^2} \ln x.$$

Integration dieser Gleichungen liefert $H(x, y) = x + \frac{1}{y} \ln x$. Die Lösungen der DGL sind dann gegeben durch

$$x + \frac{1}{y} \ln x = C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad x > 0, y \neq 0,$$

sowie die triviale Lösung $y \equiv 0$.

¹man überprüfe, dass die Voraussetzungen erfüllt sind

2. Lineare Unabhängigkeit, II

- (a) Sind die Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ und $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ linear unabhängig, so sind auch $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ linear unabhängig und es gilt $\operatorname{lin}\{f, \bar{f}\} = \operatorname{lin}\{\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f\}$.
- (b) Es liege die Differentialgleichung

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad x \in I \subset \mathbb{R} \text{ Intervall}, \quad (2)$$

mit stetigen p, q vor. Die Funktionen y_1, y_2 seien Lösungen mit der Eigenschaft

$$y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \neq 0, \quad x \in I.$$

Begründen Sie, dass $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ (c_1, c_2 beliebige Konstanten) die allgemeine Lösung von (2) ist.

LÖSUNG:

- (a) Sind $f, \bar{f}$ linear unabhängig, so folgt aus $\alpha f + \beta \bar{f} = 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, dass $\alpha = \beta = 0$. Sei nun für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$0 = \alpha \operatorname{Re} f + \beta \operatorname{Im} f = \frac{\alpha}{2}(f + \bar{f}) + \frac{\beta}{2i}(f - \bar{f}) = \frac{1}{2}(\alpha - i\beta)f + \frac{1}{2}(\alpha + i\beta)\bar{f}.$$

Dann gilt wegen der Unabhängigkeit von f und $\bar{f}$, dass

$$\begin{aligned} \alpha - i\beta &= 0 \\ \alpha + i\beta &= 0 \end{aligned}$$

und damit $\alpha = \beta = 0$, also $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ unabhängig.

Es bleibt zu zeigen, dass $\operatorname{lin}\{f, \bar{f}\} = \operatorname{lin}\{\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f\}$. Sei dazu zunächst $g \in \operatorname{lin}\{f, \bar{f}\}$, d.h. es gibt $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, sodass

$$\begin{aligned} g &= \alpha f + \beta \bar{f} = \alpha(\operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f) + \beta(\operatorname{Re} \bar{f} + i \operatorname{Im} \bar{f}) = \alpha(\operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f) + \beta(\operatorname{Re} f - i \operatorname{Im} f) \\ &= (\alpha + \beta) \operatorname{Re} f + i(\alpha - \beta) \operatorname{Im} f. \end{aligned}$$

Das bedeutet aber, dass $g \in \operatorname{lin}\{\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f\}$.

Ist umgekehrt $g \in \operatorname{lin}\{\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f\}$, so gibt es $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit

$$g = \alpha \operatorname{Re} f + \beta \operatorname{Im} f = \frac{1}{2}(\alpha - i\beta)f + \frac{1}{2}(\alpha + i\beta)\bar{f}$$

und damit $g \in \operatorname{lin}\{f, \bar{f}\}$.

- (b) Da es sich um eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung handelt, ist nach Vorlesung der Kern des zugeordneten Differentialoperators $L = D^2 + p(x)D + q(x)$, also der Lösungsraum der homogenen DGL ein zweidimensionaler Teilraum von $\mathbb{C}^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}\}$. Sind daher die Lösungen y_1, y_2 unabhängig, so ist die allgemeine Lösung der DGL in $\operatorname{lin}\{y_1, y_2\}$.

Betrachte also für $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $x \in I$,

$$0 = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x). \quad (3)$$

Diffrenziert man diese Beziehung nach x , erhält man

$$0 = c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x).$$

Angenommen $c_1 \neq 0, c_2 \neq 0$, dann erhält man aus der ersten Gleichung $y_1 = -\frac{c_2}{c_1}y_2$, die zweite Gleichung liefert $y_2' = -\frac{c_1}{c_2}y_1'$. Multiplikation dieser Gleichungen führt dann auf

$$y_1 y_2' = y_2 y_1'$$

im Widerspruch zur Annahme an y_1 und y_2 . Es können also c_1 und c_2 nicht gleichzeitig von null verschieden sein.

Sei daher o.E. $c_2 = 0$. Dann gilt mit (3) $0 = c_1 y_1(x)$ für alle $x \in I$, und damit $c_1 = 0$ (da nach Voraussetzung y_2 auf I nicht identisch null ist).

Zusammenfassend wurde also $c_1 = c_2 = 0$ gezeigt, und damit ist y_1 unabhängig von y_2 .