KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
Institut für Analysis

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektro- und Informationstechnik

Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Tobias Ried, M.Sc.

Wintersemester 2013/14
Blatt 6 vom 10.01.2014

http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm3etec2013w/

Lösungsvorschläge

1. **Lineare inhomogene DGLn mit konstanten Koeffizienten**

   Bestimmen Sie den Lösungsraum der folgenden Differentialgleichungen:

   (a) $y''' - 3y'' + 3y' - y = x^2 e^x$
   (b) $y''' + 2y'' + y' = x + 2e^{-x}$
   (c) $2y''' - 6y'' + 3y' + y = \frac{x}{4}$.

   Machen Sie dabei zur Bestimmung einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL einen geschickten Ansatz, der zur Form der Inhomogenität passt.

   Lösung:

   (a) Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung ist

   $$p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3,$$

   ein Fundamentalsystem für die homogene Differentialgleichung ist daher

   $$\left\{e^x, xe^x, x^2 e^x\right\}.$$

   Um eine partikuläre Lösung zu finden, macht man den Ansatz $y_p(x) = \alpha x^\ell e^x$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$, $\ell \in \mathbb{N}$. Es ist

   $$\begin{aligned} y_p'(x) &= \alpha e^x \left(\ell x^{\ell-1} + x^\ell\right) \\ y_p''(x) &= \alpha e^x \left(\ell(\ell-1)x^{\ell-2} + 2\ell x^{\ell-1} + x^\ell\right) \\ y_p'''(x) &= \alpha e^x \left(\ell(\ell-1)(\ell-2)x^{\ell-3} + 3\ell(\ell-1)x^{\ell-2} + 3\ell x^{\ell-1} + x^\ell\right) \end{aligned}$$

   und Einsetzen in die DGL liefert

   $$y_p'''(x) - 3y_p''(x) + 3y_p'(x) - y_p(x) = \alpha e^x \ell(\ell-1)(\ell-2)x^{\ell-3} = x^2 e^x$$

   Vergleich beider Seiten der Gleichung liefert $\ell = 5$ und $\alpha = \frac{1}{\ell(\ell-1)(\ell-2)} = \frac{1}{60}$. Es ist also $y_p(x) = \frac{1}{60}x^5 e^x$ eine partikuläre Lösung der DGL, der Lösungsraum der inhomogenen DGL damit

   $$\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 + y_p = \operatorname{lin}\left\{e^x, xe^x, x^2 e^x\right\} + \frac{1}{60}x^5 e^x.$$

   (b) Das charakteristische Polynom der DGL ist in diesem Fall

   $$p(\lambda) = \lambda(\lambda+1)^2,$$

der Lösungsraum der homogenen DGL also

$$\mathscr{L}_0 = \operatorname{lin}\{1, e^{-x}, xe^{-x}\}.$$

Um eine Lösung des inhomogenen Problems zu finden, vereinfacht man zunächst die DGL durch die Substitution $u = y'$. Dann genügt u der DGL

$$u''(x) + 2u'(x) + u(x) = x + 2e^{-x}.$$

Als Ansatz für eine partikuläre Lösung dieser DGL für u mache man sich das Superpositionsprinzip für lineare DGL zunutze: sind u_1 und u_2 Lösungen einer linearen DGL, so gilt dies auch für $\alpha u_1 + \beta u_2$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{C}$). Man setzt daher

$$u_p(x) = \alpha x + \beta + \gamma x^\ell e^{-x}$$

an, und hat

$$\begin{aligned} u_p'(x) &= \alpha + \gamma e^{-x}\left(\ell x^{\ell-1} - x^\ell\right) \\ u_p''(x) &= \gamma e^{-x}\left(\ell(\ell-1)x^{\ell-2} - 2\ell x^{\ell-1} + x^\ell\right). \end{aligned}$$

Eingesetzt in die DGL muss

$$u_p''(x) + 2u_p'(x) + u_p(x) = \gamma e^{-x}\ell(\ell-1)x^{\ell-2} + \alpha x + (\beta + 2\alpha) = x + 2e^{-x}$$

gelten. Diese Gleichung ist erfüllt für

$$\alpha = 1, \quad \beta = -2, \quad \ell = 2, \quad \gamma = \tfrac{2}{\ell(\ell-1)} = 1.$$

Daher ist $u_p(x) = x - 2 + x^2 e^{-x}$ Partikulärlösung der u-DGL, Integration liefert eine Lösung der DGL für y,

$$y_p(x) = \frac{x^2}{2} - 2x - e^{-x}(2 + 2x + x^2).$$

Der Lösungsraum der inhomogenen DGL ist somit gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathscr{L} &= \operatorname{lin}\{1, e^{-x}, xe^{-x}\} + \left(\frac{x^2}{2} - 2x - e^{-x}(2 + 2x + x^2)\right) \\ &= \operatorname{lin}\{1, e^{-x}, xe^{-x}\} + \left(\frac{x^2}{2} - 2x - x^2 e^{-x}\right) \end{aligned}$$

(c) Hier ist das charakteristische Polynom

$$p(\lambda) = 2\lambda^3 - 6\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda - 1)\left(\lambda - \tfrac{1}{2}(2 - \sqrt{6})\right)\left(\lambda - \tfrac{1}{2}(2 + \sqrt{6})\right)$$

Setzt man für die partikuläre Lösung $y_p = \alpha x + \beta$ an, erhält man

$$\alpha x + (3\alpha + \beta) = \tfrac{1}{4}x,$$

also $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = -\frac{3}{4}$. Der Lösungsraum der DGL ist damit

$$\mathscr{L} = \operatorname{lin}\left\{e^x, e^{\frac{x}{2}(2-\sqrt{6})}, e^{\frac{x}{2}(2+\sqrt{6})}\right\} + \tfrac{1}{4}x - \tfrac{3}{4}.$$

2. **Variation der Konstanten**

Finden Sie den Lösungsraum von

$$y'''(x) - 6y''(x) + 11y'(x) - 6y(x) = \cos x.$$

Verwenden Sie dabei zur Bestimmung einer partikulären Lösung der inhomogenen DGL die Methode *Variation der Konstanten.*

Lösung: Aus dem charakteristischen Polynom der Differentialgleichung

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

erhält man das Fundamentalsystem der homogenen Gleichung als $\mathscr{L}_0 = \operatorname{lin}\{u_1, u_2, u_3\}$ mit $u_1(x) = e^x$, $u_2(x) = e^{2x}$, $u_3(x) = e^{3x}$, welche zu einem Vektor $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))^T$ zusammengefasst werden.

Die Wronski-Matrix der DGL ist gegeben durch

$$W(x) = \begin{pmatrix} \vec{u}(x)^T \\ \vec{u}'(x)^T \\ \vec{u}''(x)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{pmatrix}$$

und gemäß Vorlesung lässt sich eine partikuläre Lösung $y_p = \vec{u}\cdot\vec{v}$ durch Lösen des Gleichungssystems

$$W(x)\vec{v}'(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos x \end{pmatrix}$$

bestimmen. Dazu berechnet man (z.B. via Gaußverfahren)

$$W^{-1}(x) = \begin{pmatrix} 3e^{-x} & -\frac{5}{2}e^{-x} & \frac{1}{2}e^{-x} \\ -3e^{-2x} & 4e^{-2x} & -e^{-2x} \\ e^{-3x} & -\frac{3}{2}e^{-3x} & \frac{1}{2}e^{-3x} \end{pmatrix}$$

und erhält

$$\vec{v}'(x) = W^{-1}(x)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-x}\cos x \\ -e^{-2x}\cos x \\ \frac{1}{2}e^{-3x}\cos x \end{pmatrix}.$$

Damit ist wegen

$$\int e^{-\alpha x}\cos x \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{1+\alpha^2}e^{-\alpha x}(\sin x - \alpha\cos x)$$

(partielle Integration)

$$\vec{v}(x) = \int \vec{v}'(x)\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}e^{-x}(\sin x - \cos x) \\ -\frac{1}{5}e^{-2x}(\sin x - 2\cos x) \\ \frac{1}{20}e^{-3x}(\sin x - 3\cos x) \end{pmatrix}$$

und man erhält als partikuläre Lösung

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \vec{u}(x)\cdot\vec{v}(x) = \tfrac{1}{4}(\sin x - \cos x) - \tfrac{1}{5}(\sin x - 2\cos x) + \tfrac{1}{20}(\sin x - 3\cos x) \\ &= \tfrac{1}{10}\sin x \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der DGL ist also

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} + \tfrac{1}{10}\sin x$$

3. Euler'sche Differentialgleichung

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$(2x-1)^3 y'''(x) + (2-4x)y'(x) + 4y(x) = \ln|2x-1|. \tag{1}$$

Führen Sie die Substitutionen

(a) $z(t) = y(\frac{e^t+1}{2})$, $t = \ln(2x-1)$, für $2x-1>0$,

(b) $z(t) = y(\frac{-e^t+1}{2})$, $t = \ln(-(2x-1))$, für $2x-1<0$

durch und geben Sie den Lösungsraum der resultierenden Differentialgleichung an. Bestimmen Sie damit die allgemeine Lösung der DGL (1).

Lösung:

(a) Schreibt man

$$(2x-1)^3 y'''(x) - 2(2x-1)y'(x) + 4y(x) = \ln|2x-1|,$$

so lautet die DGL ausgedrückt in der neuen Variablen t

$$e^{3t}y'''\Big(\frac{e^t+1}{2}\Big) - 2e^t y'\Big(\frac{e^t+1}{2}\Big) + 4y\Big(\frac{e^t+1}{2}\Big) = \ln e^t = t. \tag{2}$$

Nach der Kettenregel ist

$$\begin{aligned}
z'(t) &= y'\Big(\frac{e^t+1}{2}\Big)\frac{e^t}{2}\\
z''(t) &= y''\Big(\frac{e^t+1}{2}\Big)\frac{e^{2t}}{4} + y'\Big(\frac{e^t+1}{2}\Big)\frac{e^t}{2} = y''\Big(\frac{e^t+1}{2}\Big)\frac{e^{2t}}{4} + z'(t)\\
z'''(t) &= y'''\Big(\frac{e^t+1}{2}\Big)\frac{e^{3t}}{8} + y''\Big(\frac{e^t+1}{2}\Big)\Big(\frac{e^{2t}}{2} + \frac{e^{2t}}{4}\Big) + y'\Big(\frac{e^t+1}{2}\Big)\frac{e^t}{2}\\
&= y'''\Big(\frac{e^t+1}{2}\Big)\frac{e^{3t}}{8} + 3z''(t) - 2z'(t)
\end{aligned}$$

und damit erhält man aus (2) die lineare DGL zweiter Ordnung *mit konstanten Koeffizienten* für $z(t)$,

$$\begin{aligned}
8z'''(t) - 24z''(t) + 12z'(t) + 4z(t) = t, \quad \text{bzw.}\\
2z'''(t) - 6z''(t) + 3z'(t) + z(t) = \tfrac{t}{4}.
\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist (cf. Aufgabe 1 (c))

$$z(t) = c_1 e^t + c_2 e^{\lambda_1 t} + c_3 e^{\lambda_2 t} + \tfrac{1}{4}t - \tfrac{3}{4}, \tag{3}$$

mit $\lambda_1 = \frac{2-\sqrt{6}}{2}$ und $\lambda_1 = \frac{2+\sqrt{6}}{2}$.
Resubstitution liefert dann die Lösung

$$y(x) = z(\ln(2x-1)) = c_1(2x-1) + c_2(2x-1)^{\lambda_1} + c_3(2x-1)^{\lambda_2} + \tfrac{1}{4}\ln(2x-1) - \tfrac{3}{4}$$

der Euler'schen DGL (1) für $2x-1>0$, also $x > \frac{1}{2}$.

(b) Im Fall $2x-1 < 0$ liefert die angegebene Substitution dieselbe DGL (3) für $z(t)$. (Nachrechnen!)
Macht man hier die Substitution rückgängig, erhält man

$$y(x) = z(\ln(-(2x-1))) = d_1(1-2x) + d_2(1-2x)^{\lambda_1} + d_3(1-2x)^{\lambda_2} + \tfrac{1}{4}\ln(1-2x) - \tfrac{3}{4}$$

für $x < \frac{1}{2}$.

4. **Vorbereitung: Potenzreihen**

Die Funktion y sei eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(x) = 2xy'(x) + 4y(x), \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

(a) Berechnen Sie $y''(0)$ und $y'''(0)$.

(b) Zeigen Sie induktiv, dass

$$y^{(k+1)}(x) = 2xy^{(k)}(x) + 2(k+1)y^{(k-1)}(x), \quad k \in \mathbb{N}.$$

(c) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung der Funktion y um $x = 0$ und überprüfen Sie, dass die so gefundene Funktion das Anfangswertproblem löst.

LÖSUNG:

(a) Es ist eingesetzt in die DGL $y''(0) = 4y(0) = 0$. Leitet man die Differentialgleichung nach x ab, erhält man

$$y'''(x) = 2xy''(x) + 6y'(x)$$

und damit $y'''(0) = 6y'(0) = 6$.

(b) Induktionsanfang: Für $k = 1$ gilt die Behauptung, da y als Lösung des Anfangswertproblems insbesondere die Differentialgleichung erfüllt.
Induktionsschluss $k \to k+1$: Ist die Behauptung für $k \in \mathbb{N}$ gezeigt, so sind $y^{(k)}$ und $y^{(k-1)}$ differenzierbar, und damit auch

$$y^{(k+1)} = 2xy^{(k)} + 2(k+1)y^{(k-1)}.$$

Folglich ist die Funktion y sogar $(k+2)$-mal differenzierbar, und man erhält durch Ableiten

$$y^{(k+2)}(x) = 2xy^{(k+1)}(x) + 2y^{(k)}(x) + 2(k+1)y^{(k)}(x) = 2xy^{(k+1)} + 2(k+1+1)y^{(k)}(x).$$

Insbesondere folgt, dass y beliebig oft differenzierbar ist.

(c) Nach Aufgabenteil (b) gilt

$$y^{(k+1)}(0) = 2(k+1)y^{(k-1)}(0), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Für gerade $k = 2m$ ($m \in \mathbb{N}$) bedeutet dies wegen $y(0) = 0$, dass $y^{(2m)} = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Ist $k = 2m+1$ ungerade, so gilt

$$\begin{aligned} y^{(2m+1)}(0) &= 2(2m+1)y^{(2m-1)}(0) = 2(2m+1) \cdot 2(2m-1)y^{(2m-3)} \\ &= \cdots = 2(2m+1) \cdot 2(2m-1) \cdot 2(2m-3) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3y'(0) \\ &= 2^m(2m+1)(2m-1)(2m-3) \cdots 5 \cdot 3. \end{aligned}$$

Damit ist die Taylorentwicklung von y um $x = 0$ gegeben durch

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^{(2m+1)}(0)}{(2m+1)!} x^{2m+1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m(2m+1)(2m-1)(2m-3)\cdots 5 \cdot 3}{(2m+1)!} x^{2m+1} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m}{2m(2m-2)(2m-4)\cdots 4 \cdot 2} x^{2m+1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^m}{2^m m!} x^{2m+1} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{m!} = x \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x^2)^m}{m!} = xe^{x^2}. \end{aligned}$$

Dies ist in der Tat eine Lösung des Anfangswertproblems, denn

$$\begin{aligned} y'(x) &= e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2} = e^{x^2}(2x^2 + 1) \\ y''(x) &= 4xe^{x^2} + (4x^3 + 2x)e^{x^2} = (4x^3 + 6x)e^{x^2} = 2xy'(x) + 4y(x) \end{aligned}$$

und $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.