KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
Institut für Analysis

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektro- und Informationstechnik

Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Tobias Ried, M.Sc.

Wintersemester 2013/14
Blatt 7 vom 17.01.2014
http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm3etec2013w/

Lösungsvorschläge

Vorbemerkung: Gegeben sei die Differentialgleichung

$$x^2y''(x) + xp(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0, \quad x \neq 0$$

für $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k$, $q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k$. Man bezeichnet $x = 0$ als reguläre singuläre Stelle. Differentialgleichungen von diesem Typ lassen sich mittels eines verallgemeinerten Potenzreihenansatzes

$$y(x,\rho) = x^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\rho)x^k$$

mit noch zu bestimmenden ρ und c_k ($k \geq 0$) finden. Setzt man diesen Ansatz in die DGL ein, so liefert ein einfacher Koeffizientenvergleich für den Term niedrigster Ordnung in x die sogenannte Indexgleichung

$$\rho(\rho-1) + p_0\rho + q_0 = 0.$$

Der Ansatz $y(x,\rho)$ kann also nur dann eine Lösung der DGL liefern, wenn ρ eine Nullstelle $\rho_{1,2}$ der Indexgleichung ist. Es können dabei folgende Fälle auftreten:

1. **Fall**: $\rho_1 = \rho_2 \equiv \sigma$.
   In diesem Fall lässt sich eine der beiden Fundamentallösungen, y_1, der DGL durch Bestimmen der Koeffizienten $c_k(\sigma)$ finden (Einsetzen des Ansatzes $y(x,\sigma)$ in die DGL und Koeffizientenvergleich führt auf eine Rekursionsgleichung für $c_k(\sigma)$).

   Eine weitere, zu y_1 linear unabhängige Lösung erhält man dann aus

   $$y_2(x) = \partial_\rho y(x,\rho)\Big|_{\rho=\sigma} = y_1(x)x^\sigma \ln x + \sum_{k=0}^{\infty} c_k'(\sigma)x^k.$$

   Siehe Aufgabe 2. Alternativ kann man eine zweite Lösung per Reduktion der Ordnung bestimmen.

2. **Fall**: $\rho_1 \neq \rho_2$.
   Hier sind folgende Situationen möglich:

   (i) $\rho_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und $\rho_2 = \overline{\rho_1}$.
   In diesem Fall berechnet man $y(x,\rho_1)$ und erhält als (reelle) linear unabhängige Lösungen

   $$y_1(x) = \mathrm{Re}\, y(x,\rho_1)$$
   $$y_2(x) = \mathrm{Im}\, y(x,\rho_1).$$

(ii) $\rho_1 > \rho_2$ mit $\rho_1 - \rho_2 \notin \mathbb{N}$.
In diesem Fall ergeben sich direkt zwei linear unabhängige Lösungen

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y(x, \rho_1) \\ y_2(x) &= y(x, \rho_2) \end{aligned}$$

durch Lösen der jeweiligen Rekursionsgleichungen für $c_k(\rho_{1,2})$.

(iii) $\rho_1 > \rho_2$ mit $\rho_1 - \rho_2 \in \mathbb{N}$.
In diesem Fall erhält man durch Lösen der Rekursionsgleichung für ρ_1 (*d.h. die größere der beiden Nullstellen*) eine Lösung $y_1(x) = y(x, \rho_1)$ der DGL. Da für ρ_2 der Koeffizient $c_{\rho_1 - \rho_2}(\rho_2)$ im Allgemeinen nicht berechnet werden kann (man mache sich das durch Einsetzen in die DGL klar), muss eine zweite, linear unabhängige Lösung anderweitig gefunden werden. Hier bietet sich Reduktion der Ordnung an. Siehe Aufgabe 1.

1. **Potenzreihenansatz, I**

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung

$$x^2y'' + (x^2 - 3x)y' + 3y = 0, \quad x \neq 0.$$

Lösung: Die Differentialgleichung

$$x^2y'' + (x^2 - 3x)y' + 3y = x^2y'' + x\underbrace{(x-3)}_{=p(x)}y' + \underbrace{3}_{=q(x)}y = 0$$

ist eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit analytischen Koeffizientenfunktionen

$$p(x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j x^j, \quad q(x) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j x^j,$$

wobei

$$p_0 = -3, \quad p_1 = 1, \quad p_j = 0 \quad \text{für} \quad j \geq 2 \quad \text{und}$$
$$q_0 = 3, \quad q_j = 0 \quad \text{für} \quad j \geq 1.$$

Diese kann mit einem verallgemeinerten Potenzreihenansatz $y(x,\rho) = x^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ für $x > 0$ und $y(x,\rho) = (-x)^\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ für $x < 0$ gelöst werden. ρ lässt sich dabei aus der *Indexgleichung*

$$f(\rho) = \rho(\rho-1) + p_0\rho + q_0 = \rho^2 - 4\rho + 3 = (\rho-3)(\rho-1) = 0$$

mit den Lösungen $\rho_1 = 3$ und $\rho_2 = 1$ bestimmen.

Zwei Lösungen der DGL sind damit $y(x,3) = x^3 \sum_{k=0}^{\infty} c_k(3)x^k$ und $y(x,1) = x\sum_{k=0}^{\infty} c_k(1)x^k$ mit noch zu bestimmenden Koeffizienten $c_k(\rho_{1,2})$. Wegen $\rho_1 - \rho_2 \in \mathbb{N}$ sind diese Lösungen jedoch nicht linear unabhängig.

Setzt man $y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+3} = \sum_{k=3}^{\infty} c_{k-3}x^k$ in die DGL ein, erhält man

$$x^2y_1''(x) + (x^2 - 3x)y_1'(x) + 3y_1(x) = \sum_{k=3}^{\infty} x^k\left[k(k-1) - 3(k-1)\right]c_{k-3} + \sum_{k=3}^{\infty} kc_{k-3}x^{k+1}$$

$$= \sum_{k=4}^{\infty}(k-1)(k-3)c_{k-3}x^k + \sum_{k=4}^{\infty}(k-1)c_{k-4}x^k = \sum_{k=4}^{\infty} x^k(k-1)\left[(k-3)c_{k-3} + c_{k-4}\right] = 0.$$

Die c_k's erfüllen also die Rekursionsgleichung $(k-3)c_{k-3} + c_{k-4} = 0$ für $k \geq 4$, bzw.

$$c_k = -\frac{c_{k-1}}{k}, \quad k \geq 1.$$

Iterativ erhält man (Induktion)

$$c_k = (-1)^k \frac{1}{k!} c_0, \quad k \geq 1,$$

mit $c_0 = y_1(0)$ beliebig. Wir setzen $c_0 = 1$. Dann ist

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+3} = x^3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k = x^3 e^{-x} \quad \text{für} \quad x > 0,$$

und $y_1(x) = -x^3e^{-x}$ für $x < 0$. Insgesamt hat mal also $y_1(x) = |x|^3e^{-|x|}$.

Eine dazu linear unabhängige Lösung y_2 erhält man etwa durch Reduktion der Ordnung

$$y_2(x) = y_1(x)u(x) = x^3e^{-x}u(x)$$

mit noch zu bestimmendem u. Eingesetzt in die DGL hat man

$$\begin{aligned} 0 &= x^2y_2''(x) + (x^2 - 3x)y_2' + 3y_2 \\ &= u\underbrace{\left(x^2y_1'' + (x^2 - 3x)y_1' + 3y_1\right)}_{=0} + u'(2x^2y_1' + (x^2 - 3x)y_1) + x^2y_1u'' \\ &= x^2y_1u'' + xy_1(3 - x)u'. \end{aligned}$$

u genügt also der Differentialgleichung $xu'' + (3 - x)u' = 0$, welche nach Substitution $v = u'$ in die lineare homogene DGL 1. Ordnung

$$xv' + (3 - x)v = 0$$

mit der Lösung $v(x) = \frac{e^x}{x^3}$ (auf $(0, \infty)$ bzw. $(-\infty, 0)$) übergeht. Damit erhält man

$$y_2(x) = y_1u(x) = x^3e^{-x}\int \frac{e^x}{x^3}\,\mathrm{d}x$$

als zu y_1 unabhängige Lösung.

Die allgemeine Lösung der DGL ist daher

$$y(x) = c_1x^3e^{-x} + c_2x^3e^{-x}\int \frac{e^x}{x^3}\,\mathrm{d}x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

auf jedem Intervall, das 0 nicht enthält.

2. **Potenzreihenansatz, II**

Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$xy'' + y' - y = 0.$$

Lösung: Wir betrachten nur den Fall $x > 0$, $x < 0$ geht analog. Nach Multiplikation mit x geht die DGL in die Form

$$x^2y'' + xy' - xy = 0$$

über. Mit den Bezeichnungen aus der Vorlesung (siehe auch Aufgabe 1) ist dann

$$\begin{aligned} &p_0 = 1, \quad p_j = 0 \quad (j \geq 1) \\ &q_0 = 0, \quad q_1 = -1, \quad q_j = 0 \quad (j \geq 2). \end{aligned}$$

Die Indexgleichung lautet in diesem Fall $f(\rho) = \rho^2 = 0$ mit der doppelten Nullstelle $\rho = 0$.

Für die erste Lösung der DGL macht man also den Ansatz $y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. Eingesetzt in die DGL erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 = xy_1'' + y_1' - y_1 &= x\sum_{k=0}^{\infty} c_k k(k-1)x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k k x^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 c_k x^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \Big[(k+1)^2 c_{k+1} - c_k\Big] x^k \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert die Rekursionsgleichung

$$c_{k+1} = \frac{c_k}{(k+1)^2}, \quad k \geq 0.$$

Iterativ erhält man (und zeigt dies durch Induktion)

$$c_k = \frac{c_0}{(k!)^2} \quad k \geq 1.$$

Setzt man $c_0 = 1$ (das entspricht der Anfangsbedingung $y_1(0) = 1$), so hat man

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k!)^2} x^k.$$

Diese Potenzreihe kann man nicht in geschlossener Form angeben[1].

Eine zu y_1 linear unabhängige Lösung erhält man zum Beispiel (wie in der Vorlesung diskutiert) durch den Ansatz

$$y_2(x) = \partial_\rho y(x,\rho)\Big|_{\rho=0},$$

[1] Es ist $y_1(x) = I_0(2\sqrt{x})$, wobei I_0 die modifizierte Bessel-Funktion erster Art bezeichnet.

mit $y(x,\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\rho)x^{k+\rho}$ und $c_k(\rho)$ die Rekursionsgleichung

$$c_k(\rho)(k+\rho)^2 - c_{k-1}(\rho) = 0$$

erfüllen. Dann gilt nämlich (mit der Wahl $c_0(\rho) = 1$)

$$\begin{aligned}
Ly(x,\rho) &= xy''(x,\rho) + y'(x,\rho) - y(x,\rho) \\
&= \rho^2 x^{\rho-1} + x^{\rho-1}\sum_{k=1}^{\infty}\Big[c_k(\rho)(k+\rho)^2 - c_{k-1}(\rho)\Big]x^k \\
&= \rho^2 x^{\rho-1}
\end{aligned}$$

und damit wegen $\partial_\rho(Ly(x,\rho)) = L(\partial_\rho y(x,\rho))$, dass

$$x(\partial_\rho y(x,\rho))'' + (\partial_\rho y(x,\rho))' - (\partial_\rho y(x,\rho)) = \partial_\rho \rho^2 x^{\rho-1} = 2\rho x^{\rho-1} + \rho^2 x^{\rho-1}\ln x.$$

Für $\rho = 0$ folgt damit, dass $y_2(x)$ der DGL $xy_2'' + y_2' - y_2 = 0$ genügt.
Es bleibt y_2 zu berechnen. Aus der Rekursionsformel für $c_k(\rho)$ (mit $c_0 = 1$) erhält man

$$\begin{aligned}
c_k(\rho) &= \frac{c_{k-1}(\rho)}{(k+\rho)^2} = \frac{c_{k-2}(\rho)}{(k+\rho)^2(k+\rho-1)^2} = \cdots = \frac{1}{(k+\rho)^2(k+\rho-1)^2\cdots(\rho+1)^2} \\
&= \Big(\prod_{j=1}^{k}(j+\rho)^2\Big)^{-1}
\end{aligned}$$

für $k \geq 1$.

Man sieht leicht, dass

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= \partial_\rho y(x,\rho)\Big|_{\rho=0} = \partial_\rho\left(x^\rho\Big(1+\sum_{k=1}^{\infty}c_k(\rho)x^k\Big)\right)\Bigg|_{\rho=0} \\
&= \ln x\, x^\rho\Big(1+\sum_{k=1}^{\infty}c_k(\rho)x^k\Big)\Bigg|_{\rho=0} + x^\rho\sum_{k=1}^{\infty}c_k'(\rho)x^k\Bigg|_{\rho=0} \\
&= y_1(x)\ln x + \sum_{k=1}^{\infty}c_k'(0)x^k
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten $c_k'(0)$ lassen sich hier am einfachsten über die Rekursionsformel berechnen. Leitet man $(k+\rho)^2 c_k(\rho) - c_{k-1}(\rho) = 0$ nach ρ ab, so gilt

$$2(k+\rho)c_k(\rho) + (k+\rho)^2 c_k'(\rho) - c_{k-1}'(\rho) = 0, \quad k \geq 1, \quad c_0 = 1.$$

Daraus erhält man zusammen mit der Rekursionsgleichung für $c_k(\rho)$

$$\frac{c_k'(\rho)}{c_k(\rho)} = \frac{c_{k-1}'(\rho)}{c_{k-1}(\rho)} - 2(k+\rho)\frac{c_k(\rho)}{c_{k-1}(\rho)} = \frac{c_{k-1}'(\rho)}{c_{k-1}(\rho)} - \frac{2}{k+\rho}, \quad k \geq 1.$$

Für $\rho = 0$ bedeutet das

$$\frac{c_k'(0)}{c_k} = \frac{c_{k-1}'(0)}{c_{k-1}} - \frac{2}{k}, \quad k \geq 1, \quad c_k'(0) = 0,$$

und damit

$$\frac{c_n'(0)}{c_n} = \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{c_k'(0)}{c_k} - \frac{c_{k-1}'(0)}{c_{k-1}} \Big) = - \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k}, \quad n \geq 1$$

Man erhält

$$c_n'(0) = -2c_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = -\frac{2}{(n!)^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad n \geq 1.$$

3. Hermite'sche Differentialgleichung

Gegeben sei für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung

$$y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0, \quad x \in (-1, 1).$$

Berechnen Sie zwei linear unabhängige Lösungen dieser DGL in Potenzreihen-Form und zeigen Sie, dass im Fall $\alpha \in \mathbb{N}_0$ eine der Lösungen ein Polynom der Ordnung α ist.

Lösung: Der (normale) Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ liefert eingesetzt in die DGL

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^{k-2} k(k-1) + 2\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha - k) a_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[(k+1)(k+2)a_{k+2} + 2(\alpha - k)a_k\right] x^k \end{aligned}$$

die Rekursionsgleichung

$$(k+1)(k+2)a_{k+2} + 2(\alpha - k)a_k = 0, \quad k \geq 0,$$

bzw.

$$a_{k+2} = -\frac{2(\alpha - k)}{(k+1)(k+2)} a_k, \quad k \geq 0.$$

Zwei linear unabhängige Lösungen y_1, y_2 erhält man zum Beispiel durch (siehe Addendum)

(1) $a_0 = 1, a_1 = 0$ (entspricht den Anfangswerten $y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0$)
(2) $a_0 = 0, a_1 = 1$ (entspricht den Anfangswerten $y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1$)

Berechnung von y_1: Aus $a_1 = 0$ folgt mit der Rekursionsgleichung

$$a_{2m+1} = 0, \quad m \geq 0.$$

Weiter zeigt man induktiv

$$\begin{aligned} a_{2m} &= -2\frac{(\alpha - (2m-2))}{(2m-1)(2m)} a_{2m-2} = \cdots = \\ &= (-2)^m \frac{(\alpha - (2m-2))(\alpha - (2m-4)) \cdots (\alpha - 2)\alpha}{(2m)!}, \quad m \geq 1 \end{aligned}$$

und erhält

$$y_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} x^{2m} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-2)^m \frac{\alpha(\alpha - 2) \cdots (\alpha - 2(m-1))}{(2m)!} x^{2m}, \quad x \in (-1, 1).$$

Ist $\alpha = 2N$ für ein $N \in \mathbb{N}_0$, so folgt aus der Rekursionsgleichung

$$a_{2m+2} = -2\frac{2N - 2m}{(2m+1)(2m+2)} a_{2m}, \quad m \geq 0,$$

dass $a_{2m+2} = 0$, falls $k \geq N$, beziehungsweise $a_{2m} = 0$ für $m \geq N+1$. Damit ist y_1 ein Polynom $2m$-ten Grades.

Berechnung von y_2: Analog folgt aus $a_0 = 0$, dass alle Koeffizienten zu geraden Indizes verschwinden, $a_{2m} = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$. Die restlichen Koeffizienten ergeben sich zu

$$a_{2m+1} = (-2)^m \frac{(\alpha-1)(\alpha-3)\cdots(\alpha-(2m-1))}{(2m+1)!}, \quad m \geq 1$$

und damit

$$y_2(x) = x + \sum_{m=1}^{\infty} (-2)^m \frac{(\alpha-1)(\alpha-3)\cdots(\alpha-(2m-1))}{(2m+1)!} x^{2m+1}, \quad x \in (-1,1).$$

Ist $\alpha = 2N+1$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$, folgt wie oben $a_{2m+1} = 0$ für alle $k \geq N+1$, sodass y_2 in diesem Fall ein Polynom $(2N+1)$-ten Grades ist.

Addendum. Die lineare Unabhängigkeit der beiden Lösungen y_1 und y_2 folgt aus folgender allgemeinen Beobachtung:

Seien $u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ und $v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ zwei auf $B_R = \{|x| \leq R\}$ $(R > 0)$ konvergente Potenzreihen, und gelte

$$\det W_{u,v}(0) = \det \begin{pmatrix} u(0) & v(0) \\ u'(0) & v'(0) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix} = a_0 b_1 - a_1 b_0 \neq 0.$$

Dann sind u und v auf B_R linear unabhängig.

Seien dazu $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und

$$0 = \alpha u(x) + \beta v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) x^k$$

Koeffizientenvergleich liefert $\alpha a_k + \beta b_k = 0$ für alle $k \geq 0$. Insbesondere gilt also

$$\begin{aligned} \alpha a_0 + \beta b_0 &= 0 \\ \alpha a_1 + \beta b_1 &= 0 \end{aligned} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da die Matrix $W_{u,v}(0)$ nach Voraussetzung invertierbar ist, folgt $\alpha = \beta = 0$, und damit u, v linear unabhängig.