Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektro- und Informationstechnik

Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Tobias Ried, M.Sc.
Wintersemester 2013/14
Blatt 7 vom 17.01.2014
http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm3etec2013w/

Lösungsvorschläge – Teil 1

1. **Potenzreihenansatz, I**

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung

$$x^2y'' + (x^2 - 3x)y' + 3y = 0, \quad x \neq 0.$$

Lösung: Die Differentialgleichung

$$x^2y'' + (x^2 - 3x)y' + 3y = x^2y'' + x\underbrace{(x-3)}_{=p(x)}y' + \underbrace{3}_{=q(x)}y = 0$$

ist eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit analytischen Koeffizientenfunktionen

$$p(x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j x^j, \quad q(x) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j x^j,$$

wobei

$$p_0 = -3, \quad p_1 = 1, \quad p_j = 0 \quad \text{für} \quad j \geq 2 \quad \text{und}$$
$$q_0 = 3, \quad q_j = 0 \quad \text{für} \quad j \geq 1.$$

Diese kann mit einem verallgemeinerten Potenzreihenansatz $y(x,\rho) = x^\rho \sum_{k=0}^\infty c_k x^k$ für $x > 0$ und $y(x,\rho) = (-x)^\rho \sum_{k=0}^\infty c_k x^k$ für $x < 0$ gelöst werden. ρ lässt sich dabei aus der *Indexgleichung*

$$f(\rho) = \rho(\rho-1) + p_0\rho + q_0 = \rho^2 - 4\rho + 3 = (\rho-3)(\rho-1) = 0$$

mit den Lösungen $\rho_1 = 3$ und $\rho_2 = 1$ bestimmen.

Zwei Lösungen der DGL sind damit $y(x,3) = x^3 \sum_{k=0}^\infty c_k(3)x^k$ und $y(x,1) = x \sum_{k=0}^\infty c_k(1)x^k$ mit noch zu bestimmenden Koeffizienten $c_k(\rho_{1,2})$. Wegen $\rho_1 - \rho_2 \in \mathbb{N}$ sind diese Lösungen jedoch nicht linear unabhängig.

Setzt man $y_1(x) = \sum_{k=0}^\infty c_k x^{k+3} = \sum_{k=3}^\infty c_{k-3}x^k$ in die DGL ein, erhält man

$$x^2y_1''(x) + (x^2-3x)y_1'(x) + 3y_1(x) = \sum_{k=3}^\infty x^k\left[k(k-1) - 3(k-1)\right]c_{k-3} + \sum_{k=3}^\infty kc_{k-3}x^{k+1}$$

$$= \sum_{k=4}^\infty (k-1)(k-3)c_{k-3}x^k + \sum_{k=4}^\infty (k-1)c_{k-4}x^k = \sum_{k=4}^\infty x^k(k-1)\left[(k-3)c_{k-3} + c_{k-4}\right] = 0.$$

Die c_k's erfüllen also die Rekursionsgleichung $(k-3)c_{k-3} + c_{k-4} = 0$ für $k \geq 4$, bzw.

$$c_k = -\frac{c_{k-1}}{k}, \quad k \geq 1.$$

Iterativ erhält man (Induktion)

$$c_k = (-1)^k \frac{1}{k!} c_0, \quad k \geq 1,$$

mit $c_0 = y_1(0)$ beliebig. Wir setzen $c_0 = 1$. Dann ist

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+3} = x^3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k = x^3 e^{-x} \quad \text{für} \quad x > 0,$$

und $y_1(x) = -x^3 e^{-x}$ für $x < 0$. Insgesamt hat mal also $y_1(x) = |x|^3 e^{-|x|}$.
Eine dazu linear unabhängige Lösung y_2 erhält man etwa durch Reduktion der Ordnung

$$y_2(x) = y_1(x)u(x) = x^3 e^{-x} u(x)$$

mit noch zu bestimmendem u. Eingesetzt in die DGL hat man

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 y_2''(x) + (x^2 - 3x)y_2' + 3y_2 \\ &= u \underbrace{\left(x^2 y_1'' + (x^2 - 3x)y_1' + 3y_1\right)}_{=0} + u'(2x^2 y_1' + (x^2 - 3x)y_1) + x^2 y_1 u'' \\ &= x^2 y_1 u'' + x y_1 (3 - x) u'. \end{aligned}$$

u genügt also der Differentialgleichung $xu'' + (3-x)u' = 0$, welche nach Substitution $v = u'$ in die lineare homogene DGL 1. Ordnung

$$xv' + (3-x)v = 0$$

mit der Lösung $v(x) = \frac{e^x}{x^3}$ (auf $(0, \infty)$ bzw. $(-\infty, 0)$) übergeht. Damit erhält man

$$y_2(x) = y_1 u(x) = x^3 e^{-x} \int \frac{e^x}{x^3} \, \mathrm{d}x$$

als zu y_1 unabhängige Lösung.
Die allgemeine Lösung der DGL ist daher

$$y(x) = c_1 x^3 e^{-x} + c_2 x^3 e^{-x} \int \frac{e^x}{x^3} \, \mathrm{d}x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

auf jedem Intervall, das 0 nicht enthält.