KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
Institut für Analysis

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektro- und Informationstechnik

Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Tobias Ried, M.Sc.

Wintersemester 2013/14
Blatt 8 vom 23.01.2014
http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm3etec2013w/

Übungsaufgaben

1. **Berechnung des Matrixexponentials**

   Berechnen Sie e^{tA} für

   (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

   (c) $A = \lambda E_d + N$ mit einer nilpotenten Matrix $N \in \mathbb{R}^{(d,d)}$ (d.h. es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $N^k = 0$).

   (d) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. **Geladenes Teilchen im homogenen Magnetfeld**

   Die Geschwindigkeit $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ eines Teilchens der Ladung e und Masse m genügt im konstanten magnetischen Feld $\vec{B}$ der Bewegungsgleichung

   $$\dot{\vec{v}}(t) = \vec{v} \times \vec{b}, \quad \text{mit} \quad \vec{b} = \frac{e}{m}\vec{B} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

   $\omega = |\vec{b}|$ bezeichnet die Zyklotron(kreis)frequenz.

   (a) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ der Abbildung $\vec{v} \mapsto \vec{v} \times \vec{b}$.

   (b) Zu $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ seien $\vec{v}_{\parallel} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$ und $\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{v}_{\parallel}$ die zum Magnetfeld parallele bzw. senkrechte Komponente des Geschwindigkeitsvektors. Man zeige für $t \in \mathbb{R}$, dass

   $$e^{tA}\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \cos(\omega t)\vec{v}_{\perp} + \sin(\omega t)\frac{1}{\omega}\vec{v} \times \vec{b}.$$

   Interpretieren Sie e^{tA} geometrisch.

   Hinweis: Man wähle die (rechtshändige) Orthonormalbasis $(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ des $\mathbb{R}^3$ so, dass $\vec{b} = \omega\vec{c}_3$ und $\vec{v} = v_1\vec{c}_1 + v_3\vec{c}_3$, $(v_1, v_3 \in \mathbb{R})$.

3. **Inhomogenes Differentialgleichungssystem**

   Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}(t) + \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. **Regularität der Wronski-Matrix**

   Sei $P = P(t)$, $t \in J$, eine stetige (n,n)-matrixwertige Funktion und seien $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ Lösungen des Differentialgleichungssystems $\vec{y}'(t) = P(t)\vec{y}(t)$, $t \in J$.

   Zeigen Sie, dass für $W(t) := \det\left[\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \dots, \vec{y}_n(t)\right]$ gilt:

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{Spur} P(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right), \quad t, t_0 \in J.$$

Besprechung der Übungsaufgaben: Freitag, 31.01.2014

Hinweise zur Übungsklausur

Die Übungsklausur zur HM III findet am **Samstag, 01.02.2014, 8.00-10.00 Uhr**, im **Daimler-Hörsaal** statt.

- Bitte erscheinen Sie pünktlich!
- Für die Teilnahme an der Übungsklausur ist *keine* Anmeldung erforderlich.
- Mitzubringen sind *Studierendenausweis* und *Schreibgerät*, Papier wird gestellt.
- Zugelassene Hilfsmittel sind ausschließlich **zwei** handbeschriebene DIN A4-Seiten (insgesamt vier Seiten).
- Nur durch die erfolgreiche Teilnahme an der Übungsklausur kann man einen Übungsschein erwerben. Bitte wenden Sie sich hierzu an unser Sekretariat (Allianz-Gebäude 3B-02).
- Beachten Sie auch das allgemeine Merkblatt

  `http://www.math.kit.edu/iana1/seite/merkblatt-hm/`

  und die aktuellen Hinweise auf der Vorlesungswebseite

  `http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm3etec2013w/`