KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
Institut für Analysis

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektro- und Informationstechnik

Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Tobias Ried, M.Sc.
http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm3etec2013w/

Wintersemester 2013/14
Blatt 8 vom 31.01.2014

Lösungsvorschläge

1. **Berechnung des Matrixexponentials**

   Berechnen Sie e^{tA} für

   (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

   (c) $A = \lambda E_d + N$ mit einer nilpotenten Matrix $N \in \mathbb{C}^{(d,d)}$ (d.h. es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $N^k = 0$).

   (d) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

   Lösung:

   (a) Es ist $A^2 = -E$, $A^3 = -A$, $A^4 = -A^2 = E$ und man zeigt induktiv

   $$A^{2n} = (-1)^n E, \quad A^{2n+1} = (-1)^n A, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

   Damit erhält man für $t \in \mathbb{R}$

   $$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} (-1)^n \right) E + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} (-1)^n \right) A \\ &= (\cos t) E + (\sin t) A = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   (b) Das charakteristische Polynom der Matrix ist

   $$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) &= \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (-1-\lambda)(1-\lambda) + 2 = \lambda^2 + 1 = (\lambda - \mathrm{i})(\lambda + \mathrm{i}). \end{aligned}$$

   A besitzt also die einfachen Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}$, mit zugehörigen Eigenvektoren

   $$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Setzt man $S = \left[\vec{b}_1, \vec{b}_2\right]$, so gilt $A = SDS^{-1}$ mit $D = \operatorname{diag}(\mathrm{i}, -\mathrm{i})$ und damit

$$e^{tA} = e^{tSDS^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \underbrace{(SDS^{-1})^k}_{=SD^kS^{-1}} = S\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} D^k\right) S^{-1} = Se^{tD}S^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1+\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}t} & 0 \\ 0 & e^{-\mathrm{i}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\mathrm{i}}{4} & -\frac{\mathrm{i}}{2} \\ \frac{1-\mathrm{i}}{4} & \frac{\mathrm{i}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t & 2\sin t \\ -\sin t & \cos t + \sin t \end{pmatrix}$$

(c) Man erinnere sich an folgende Eigenschaft der Matrixexponentialfunktion: sind $A, B \in \mathbb{C}^{(d,d)}$ mit $AB = BA$ (d.h. A und B kommutieren), dann gilt $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB} = e^{tB}e^{tA}$.
Sei nun k derart, dass $N^k = 0$ und damit $N^{k+j} = 0$ für alle $j \geq 0$. Ferner kommutieren N und λE. Es folgt

$$e^{tA} = e^{t(\lambda E+N)} = e^{t\lambda E}e^{tN} = e^{t\lambda}E \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} N^m = e^{t\lambda} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{t^m}{m!} N^m$$

$$= e^{t\lambda}\left(E + tN + \frac{t^2}{2}N^2 + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}N^{k-1}\right)$$

(d) Vorbemerkung: sei $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ eine Blockdiagonalmatrix. Dann gilt $A^k = \begin{pmatrix} B^k & 0 \\ 0 & C^k \end{pmatrix}$ und somit $e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{tB} & 0 \\ 0 & e^{tC} \end{pmatrix}$.
Im vorliegenden Beispiel hat man $B = (5)$ und

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2E_3 + N$$

mit der nilpotenten Matrix $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. In der Tat gilt $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $N^3 = 0$.
Mit Aufgabenteil (c) hat man

$$e^{tC} = e^{2t}(E + tN + \frac{t^2}{2}N^2) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und wegen der Blockdiagonalstruktur von A folgt

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{5t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2}{2}e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

2. **Geladenes Teilchen im homogenen Magnetfeld**

Die Geschwindigkeit $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ eines Teilchens der Ladung e und Masse m genügt im konstanten magnetischen Feld $\vec{B}$ der Bewegungsgleichung

$$\dot{\vec{v}}(t) = \vec{v} \times \vec{b}, \quad \text{mit} \quad \vec{b} = \tfrac{e}{m}\vec{B} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

$\omega = |\vec{b}|$ bezeichnet die Zyklotron(kreis)frequenz.

(a) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ der Abbildung $\vec{v} \mapsto \vec{v} \times \vec{b}$.

(b) Zu $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ seien $\vec{v}_{||} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$ und $\vec{v}_\perp = \vec{v} - \vec{v}_{||}$ die zum Magnetfeld parallele bzw. senkrechte Komponente des Geschwindigkeitsvektors. Man zeige für $t \in \mathbb{R}$, dass

$$e^{tA}\vec{v} = \vec{v}_{||} + \cos(\omega t)\vec{v}_\perp + \sin(\omega t)\tfrac{1}{\omega}\vec{v} \times \vec{b}.$$

Interpretieren Sie e^{tA} geometrisch.

Hinweis: Man wähle die (rechtshändige) Orthonormalbasis $(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ des $\mathbb{R}^3$ so, dass $\vec{b} = \omega\vec{c}_3$ und $\vec{v} = v_1\vec{c}_1 + v_3\vec{c}_3$, $(v_1, v_3 \in \mathbb{R})$.

Lösung:

(a) In der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ ist

$$\vec{v} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} v_2b_3 - v_3b_2 \\ v_3b_1 - v_1b_3 \\ v_1b_2 - v_2b_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & b_3 & -b_2 \\ -b_3 & 0 & b_1 \\ b_2 & -b_1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

(b) Wählt man die im Hinweis angegebene Basis $(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$, so ist bezüglich dieser Basis $\vec{b} = (0, 0, \omega)$, $\vec{v} = (v_1, 0, v_3)^T$ und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit (A ist bezüglich dieser Basis blockdiagonal) folgt

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t & 0 \\ -\sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also

$$e^{tA}\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1\cos\omega t \\ -v_1\sin\omega t \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1\cos(\omega t)\vec{c}_1 - v_1\sin(\omega t)\vec{c}_2 + v_3\vec{c}_3.$$

Andererseits ist $\vec{v}_{||} = v_3\vec{c}_3$, $\vec{v}_\perp = v_1\vec{c}_1$ und $\frac{1}{\omega}\vec{v} \times \vec{b} = v_1(\vec{c}_1 \times \vec{c}_3) = -v_1\vec{c}_2$ und damit

$$\vec{v}_{||} + \cos(\omega t)\vec{v}_\perp + \sin(\omega t)\tfrac{1}{\omega}\vec{v} \times \vec{b} = v_3\vec{c}_3 + \cos(\omega t)v_1\vec{c}_1 - \sin(\omega t)v_1\vec{c}_2,$$

womit die Gleichheit gezeigt ist.

e^{tA} ist eine Rotation um die von $\vec{b}$ aufgespannte Achse um den Winkel ωt im Uhrzeigersinn.

3. Inhomogenes Differentialgleichungssystem

Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}(t) + \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

LÖSUNG: Bezeichne $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ und $b(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix}$. Zur Lösung des homogenen Problems berechnet man zunächst e^{tA}.

Das charakteristische Polynom der Matrix A ist

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 6)(\lambda - 1),$$

diese besitzt also die einfachen Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$ und zugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Damit hat man

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}_{=:S} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

und es folgt

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{6t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}e^t + \frac{3}{5}e^{6t} & -\frac{2}{5}e^t + \frac{2}{5}e^{6t} \\ -\frac{3}{5}e^t + \frac{3}{5}e^{6t} & \frac{3}{5}e^t + \frac{2}{5}e^{6t} \end{pmatrix}$$

Mit Variation der Konstanten erhält man

$$\begin{aligned}
\vec{x}(t) &= e^{tA}\vec{x}(0) + \int_0^t e^{(t-s)A} b(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2}{5}e^t + \frac{3}{5}e^{6t} \\ -\frac{3}{5}e^t + \frac{3}{5}e^{6t} \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{2}{5}e^{t-s} + \frac{3}{5}e^{6(t-s)} & -\frac{2}{5}e^{t-s} + \frac{2}{5}e^{6(t-s)} \\ -\frac{3}{5}e^{t-s} + \frac{3}{5}e^{6(t-s)} & \frac{3}{5}e^{t-s} + \frac{2}{5}e^{6(t-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^s \\ e^{2s} \end{pmatrix} \mathrm{d}s \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2}{5}e^t + \frac{3}{5}e^{6t} \\ -\frac{3}{5}e^t + \frac{3}{5}e^{6t} \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} -\frac{2}{5}e^{s+t} + \frac{3}{5}e^{6t-5s} + \frac{2}{5}e^{6t-4s} + \frac{2}{5}e^t \\ \frac{3}{5}e^{s+t} + \frac{3}{5}e^{6t-5s} + \frac{2}{5}e^{6t-4s} - \frac{3}{5}e^t \end{pmatrix} \mathrm{d}s \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2}{5}e^t + \frac{3}{5}e^{6t} \\ -\frac{3}{5}e^t + \frac{3}{5}e^{6t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{5}te^t + \frac{7}{25}e^t - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{11}{50}e^{6t} \\ -\frac{3}{5}te^t - \frac{18}{25}e^t + \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{11}{50}e^{6t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2}{5}te^t + \frac{17}{25}e^t - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{41}{50}e^{6t} \\ -\frac{3}{5}te^t - \frac{33}{25}e^t + \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{41}{50}e^{6t} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

4. **Regularität der Wronski-Matrix**

Sei $P = P(t)$, $t \in J$, eine stetige (n,n)-matrixwertige Funktion und seien $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n$ Lösungen des Differentialgleichungssystems $\vec{y}'(t) = P(t)\vec{y}(t)$, $t \in J$.

Zeigen Sie, dass für $W(t) := \det\left[\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \dots, \vec{y}_n(t)\right]$ gilt:

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{Spur} P(\tau)\, \mathrm{d}\tau\right), \quad t, t_0 \in J.$$

Lösung: Sei $Y(t) := \left[\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \dots, \vec{y}_n(t)\right]$. Differenziert man $W(t) = \det\left[\vec{y}_1(t), \vec{y}_2(t), \dots, \vec{y}_n(t)\right]$ nach t, erhält man mit den Rechenregeln für Determinanten (siehe auch Aufgabe 4 auf Blatt 5)

$$\begin{aligned} W'(t) &= \sum_{j=1}^{n} \det\left[\vec{y}_1(t), \dots, \vec{y}_{j-1}(t), \vec{y}_j'(t), \vec{y}_{j+1}(t), \dots, \vec{y}_n(t)\right] \\ &= \sum_{j=1}^{n} \det\left[\vec{y}_1(t), \dots, \vec{y}_{j-1}(t), P(t)\vec{y}_j(t), \vec{y}_{j+1}(t), \dots, \vec{y}_n(t)\right] \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \det\left((\lambda E - P(t))Y(t)\right) &= \det(\lambda E - P(t)) \det Y(t) \\ &= \left[\lambda^n - \lambda^{n-1}\operatorname{Spur} P(t) + \cdots + (-1)^n \det P(t)\right] W(t) \end{aligned}$$

Andererseits hat man wegen Linearität der Determinante in den Spalten

$$\begin{aligned} \det\left((\lambda E - P(t))Y(t)\right) &= \det\left[\lambda\vec{y}_1(t) - P(t)\vec{y}_1(t), \dots, \lambda\vec{y}_n(t) - P(t)\vec{y}_n(t)\right] \\ &= \lambda^n \det Y(t) - \lambda^{n-1} \sum_{j=1}^{n} \det\left[\vec{y}_1(t), \dots, \vec{y}_{j-1}(t), P(t)\vec{y}_j(t), \vec{y}_{j+1}(t), \dots, \vec{y}_n(t)\right] + \cdots \\ &\quad \cdots + (-1)^n \det P(t) \det Y(t). \end{aligned}$$

Vergleich der beiden Ausdrücke liefert

$$\operatorname{Spur} P(t)\, W(t) = \sum_{j=1}^{n} \det\left[\vec{y}_1(t), \dots, \vec{y}_{j-1}(t), P(t)\vec{y}_j(t), \vec{y}_{j+1}(t), \dots, \vec{y}_n(t)\right] = W'(t).$$

W genügt also der Differentialgleichung

$$W'(t) = W(t) \operatorname{Spur} P(t)$$

mit der Lösung

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{Spur} P(\tau)\, \mathrm{d}\tau\right).$$