KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
Institut für Analysis

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektro- und Informationstechnik

Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Tobias Ried, M.Sc.

Wintersemester 2013/14
Blatt 9 vom 30.01.2014

http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm3etec2013w/

Übungsaufgaben

1. **Gekoppeltes Doppelpendel**

   Die Auslenkungen $q_1(t), q_2(t) \in \mathbb{R}$ zweier gekoppelter Pendel wird beschrieben durch das System zweiter Ordnung
   $$\begin{aligned} \ddot{q}_1 &= -q_1 - \kappa(q_1 - q_2) \\ \ddot{q}_2 &= -q_2 - \kappa(q_2 - q_1) \end{aligned} \tag{1}$$
   mit der Federkonstanten $\kappa \geq 0$.

   (a) Schreiben Sie das System (1) als System erster Ordnung $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ mit $\vec{x} = (q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)$ und
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & E_2 \\ -C & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(4,4)}.$$
   Wie lautet $C \in \mathbb{R}^{(2,2)}$?

   (b) Zeigen Sie, dass C aus (a) reell-symmetrisch ist und bestimmen Sie $\sqrt{C}$, sowie $\cos(t\sqrt{C})$, $\sin(t\sqrt{C})$. Hinweis: Ist $C = \lambda_1 \vec{u}_1 \vec{u}_1^T + \lambda_2 \vec{u}_2 \vec{u}_2^T$ mit einer ONB $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$, so ist $f(C) := f(\lambda_1)\vec{u}_1\vec{u}_1^{\,T} + f(\lambda_2)\vec{u}_2\vec{u}_2^T$.

   (c) Geben Sie ein reelles Fundamentalsystem des zugehörigen Systems erster Ordnung aus (a) an.

2. **Wärmeleitungsgleichung**

   Sei
   $$\mathscr{L} := \left\{ u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} : (x,t) \mapsto u(x,t) \text{ ist } \mathscr{C}^2 \text{ und } \partial_t u = \frac{\gamma}{2} \partial_x^2 u \right\}$$
   die Menge aller Lösungen der Wärmeleitungsgleichung mit Diffusionskonstante $\gamma > 0$. Eine solche Lösung beschreibt zum Beispiel die zeitabhängige Temperaturverteilung in einem eindimensionalen Wärmeleiter.

   (a) Zeigen Sie, dass $\mathscr{L}$ ein Vektorraum ist.

   (b) Finden Sie beschränkte Lösungen $u \in \mathscr{L}$ der Form $u(x,t) = f(t)g(x)$ durch Separation der Abhängigkeit von x und t.

   (c) Sei $u_0(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\gamma t}}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $u_0 \in \mathscr{L}$ und skizzieren Sie $x \mapsto u_0(x,t)$ für verschiedene t mit $\gamma = 1$.

3. **Lösung mittels Polarkoordinaten**

   Berechnen Sie die Lösungen der partiellen Differentialgleichung
   $$-y\, D_1 u(x,y) + x\, D_2 u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},$$
   indem Sie Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ mit $r \in (0,\infty)$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ einführen.

Besprechung der Übungsaufgaben: Freitag, 07.02.2014