

**Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektro- und Informationstechnik**

DR. ANDREAS MÜLLER-RETTKOWSKI

Wintersemester 2013/14

TOBIAS RIED, M.Sc.

Blatt 10 vom 06.02.2014

<http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm3etec2013w/>

**Übungsaufgaben**

**1. Huygens-Prinzip für die eindimensionale Wellengleichung**

Betrachten Sie das Cauchy-Problem für die homogene Wellengleichung in einer Dimension für  $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ ,

$$\partial_t^2 u(x, t) - c^2 \partial_x^2 u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \partial_t u(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

(a) Zeigen Sie die D'ALEMBERTSche Lösungsformel

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x - ct) + f(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(y) dy \quad (3)$$

indem Sie die Differentialgleichung (1) zunächst in die *charakteristischen Koordinaten*

$$\eta = x + ct, \quad \xi = x - ct$$

transformieren und die resultierende DGL lösen.

(b) Sei nun  $g(x) = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  und  $f(x) = 0$  für alle  $|x| > R$  ( $R > 0$ ). Zeigen Sie mit Hilfe von (3), dass  $u(x, t) = 0$  für  $t > R$ , sowie für  $|x| < t - R$  und  $|x| > t + R$  (HUYGENS-Prinzip). Skizzieren Sie das von der Anfangsbedingung  $f$  beeinflusste Gebiet in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ .

(c) Was ändert sich im Fall  $f(x) = g(x) = 0$  für alle  $|x| > R$  ( $R > 0$ )?

**2. Transportgleichung**

(a) Bestimmen Sie die Lösung der homogenen Rand-Anfangswertaufgabe

$$\partial_t u(x, t) - \partial_x u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+$$

$$u(x, 0) = 2, \quad x \in (0, 1)$$

$$u(1, t) = \frac{2}{1 + t^2}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

(b) Finden Sie die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems

$$\partial_t u(x, t) + \frac{3}{2} \partial_x u(x, t) = \frac{1}{2} e^{x+t}, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Besprechung der Übungsaufgaben:** Freitag, 14.02.2014

HINWEISE ZUR KLAUSUR

Die Klausur zur HM III findet am **Donnerstag, 06.03.2014, 11.00-13.00 Uhr**, statt.

**Anmeldeschluss** ist Freitag, 07.02.2014.

Bitte beachten Sie das → allgemeine Merkblatt und die aktuellen Hinweise auf der Vorlesungswebseite.

*Viel Erfolg bei der Klausur und alles Gute für Ihr weiteres Studium!*