KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
Institut für Analysis

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektro- und Informationstechnik

Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Tobias Ried, M.Sc.

Wintersemester 2013/14
Blatt 10 vom 14.02.2014

http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm3etec2013w/

Lösungsvorschläge

Vorbemerkung: **Koordinatentransformationen**

Gegeben sei eine Funktion $u \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^d)$, sowie eine Koordinatentransformation $\Psi : \mathbb{R}^n \supseteq U \to \mathbb{R}^n$,

$$(\xi_1, \dots, \xi_d) \mapsto \Psi(\xi_1, \dots, \xi_d) = \begin{pmatrix} \Psi_1(\xi_1, \dots, \xi_d) \\ \vdots \\ \Psi_d(\xi_1, \dots, \xi_d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}.$$

Sei $v \in \mathscr{C}^1(U)$ mit

$$v(\xi_1, \dots, \xi_d) := u(\Psi(\xi_1, \dots, \xi_d)) = u(\Psi_1(\xi_1, \dots, \xi_d), \dots, \Psi_d(\xi_1, \dots, \xi_d)).$$

Dann gilt gemäß Kettenregel

$$D_j v(\xi_1, \dots, \xi_d) = \sum_{k=1}^{d} D_k u(\Psi(\xi_1, \dots, \xi_d)) D_j \Psi_k(\xi_1, \dots, \xi_d)$$

oder anders geschrieben (aber in diesem Zusammenhang etwas undurchsichtiger)

$$\partial_{\xi_j} v(\xi_1, \dots, \xi_d) = \sum_{k=1}^{d} \partial_{x_k} u(\Psi(\xi_1, \dots, \xi_d)) \partial_{\xi_j} \Psi_k(\xi_1, \dots, \xi_d)$$

Fasst man die partiellen Ableitungen zum Gradientenvektor zusammen, so gilt

$$\nabla_{(\xi)} v(\xi_1, \dots, \xi_d) = \begin{pmatrix} D_1 v(\xi_1, \dots, \xi_d) \\ \vdots \\ D_d v(\xi_1, \dots, \xi_d) \end{pmatrix} = D\Psi(\xi_1, \dots, \xi_d) \nabla_{(x)} u(\Psi(\xi_1, \dots, \xi_d))$$

mit der Jacobimatrix von Ψ,

$$D\Psi(\xi_1, \dots, \xi_d) = \begin{pmatrix} D_1\Psi_1(\xi_1, \dots, \xi_d) & \cdots & D_d\Psi_1(\xi_1, \dots, \xi_d) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1\Psi_d(\xi_1, \dots, \xi_d) & \cdots & D_d\Psi_d(\xi_1, \dots, \xi_d) \end{pmatrix}.$$

Führt man neue (von $(\xi_1, \dots, \xi_d)$ abhängige) Basisvektoren

$$\vec{\eta}_j = \frac{(D\Psi)\vec{e}_j}{|(D\Psi)\vec{e}_j|} = \frac{1}{|(D\Psi)\vec{e}_j|} (D_j\Psi_1, \cdots, D_j\Psi_d)^T$$

ein, lässt sich der Gradient von u in der transformierten Basis schreiben als

$$\nabla_x u(x_1, \dots, x_d) = \sum_{k=1}^{d} \frac{D_k v(\Psi^{-1}(\xi_1, \dots, \xi_d))}{|D\Psi(\Psi^{-1}(\xi_1, \dots, \xi_d))\vec{e}_k|} \vec{\eta}_k(\xi_1, \dots, \xi_d)$$

1. **Huygens-Prinzip für die eindimensionale Wellengleichung**

Betrachten Sie das Cauchy-Problem für die homogene Wellengleichung in einer Dimension für $u \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$,

$$\partial_t^2 u(x,t) - c^2 \partial_x^2 u(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \tag{1}$$
$$u(x,0) = f(x), \quad \partial_t u(x,0) = g(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

(a) Zeigen Sie die D'ALEMBERTsche Lösungsformel

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(f(x-ct) + f(x+ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,\mathrm{d}y \tag{3}$$

indem Sie die Differentialgleichung (1) zunächst in die *charakteristischen Koordinaten*

$$\eta = x + ct, \quad \xi = x - ct$$

transformieren und die resultierende DGL lösen.

(b) Sei nun $g(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $f(x) = 0$ für alle $|x| > R$ $(R > 0)$. Zeigen Sie mit Hilfe von (3), dass $u(0,t) = 0$ für $ct > R$, sowie $u(x,t) = 0$ für $|x| < ct - R$ und $|x| > ct + R$ (HUYGENS-Prinzip). Skizzieren Sie das von der Anfangsbedingung f beeinflusste Gebiet in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

(c) Was ändert sich im Fall $f(x) = g(x) = 0$ für alle $|x| > R$ $(R > 0)$?

LÖSUNG:

(a) Die Wellengleichung kann geschrieben werden als

$$(\partial_t + c\partial_x)(\partial_t - c\partial_x)u(x,t) = (D_2 + cD_1)(D_2 - cD_1)u(x,t) = 0.$$

Führt man die neuen Koordinaten $\eta = x + ct$, $\xi = x - ct$ ein, so gilt $x = \frac{1}{2}(\eta + \xi)$ und $t = \frac{1}{2c}(\eta - \xi)$. Definiert man $v(\eta,\xi) = u\left(\frac{1}{2}(\eta+\xi), \frac{1}{2c}(\eta-\xi)\right)$, dann folgt

$$\begin{aligned}
\partial_\eta v(\eta,\xi) &= \frac{1}{2} D_1 u\left(\tfrac{1}{2}(\eta+\xi), \tfrac{1}{2c}(\eta-\xi)\right) + \frac{1}{2c} D_2 u\left(\tfrac{1}{2}(\eta+\xi), \tfrac{1}{2c}(\eta-\xi)\right) \\
&= \frac{1}{2c}\left(D_2 + cD_1\right) u\left(\tfrac{1}{2}(\eta+\xi), \tfrac{1}{2c}(\eta-\xi)\right) \\
\partial_\xi v(\eta,\xi) &= \frac{1}{2} D_1 u\left(\tfrac{1}{2}(\eta+\xi), \tfrac{1}{2c}(\eta-\xi)\right) - \frac{1}{2c} D_2 u\left(\tfrac{1}{2}(\eta+\xi), \tfrac{1}{2c}(\eta-\xi)\right) \\
&= -\frac{1}{2c}\left(D_2 - cD_1\right) u\left(\tfrac{1}{2}(\eta+\xi), \tfrac{1}{2c}(\eta-\xi)\right)
\end{aligned}$$

und damit

$$\partial_\eta \partial_\xi v(\eta,\xi) = -\frac{1}{4c^2}\left(D_2 + cD_1\right)\left(D_2 - cD_1\right) u\left(\tfrac{1}{2}(\eta+\xi), \tfrac{1}{2c}(\eta-\xi)\right) = 0.$$

Dies impliziert

$$\partial_\xi v(\eta,\xi) = \Phi'(\xi)$$

mit einer beliebigen Funktion $\Phi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ und folglich

$$v(\eta,\xi) = \Phi(\xi) + \Psi(\eta), \quad \Psi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}) \text{ beliebig.}$$

Insgesamt erhält man also

$$u(x,t) = v(x+ct, x-ct) = \Phi(x-ct) + \Psi(x+ct)$$

mit $\Phi, \Psi \in \mathscr{C}^1$ beliebig (damit $u \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$, müssen Φ und Ψ in $\mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ sein).
Um den Anfangsbedingungen zu genügen, muss für alle $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ gelten

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \Phi(x) + \Psi(x) = f(x) \\ \partial_t u(x,0) &= c\Psi'(x) - c\Phi'(x) = g(x). \end{aligned}$$

Integration der zweiten Gleichung bezüglich x führt auf

$$\Psi(x) - \Phi(x) = \frac{1}{c} \int_0^x g(y)\,\mathrm{d}y$$

und zusammen mit der ersten Gleichung bekommt man

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(y)\,\mathrm{d}y \\ \Phi(x) &= \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(y)\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\Big(f(x+ct) + f(x-ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} g(y)\,\mathrm{d}y - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} g(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\Big(f(x+ct) + f(x-ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

(b) Für $g \equiv 0$ ist nach Aufgabenteil (a) die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)).$$

Gilt nun $f(x) = 0$ für $|x| > R$, so folgt

$$\begin{aligned} f(x+ct) &= 0 \quad \text{für} \quad |x+ct| > R, \\ f(x-ct) &= 0 \quad \text{für} \quad |x-ct| > R. \end{aligned}$$

Insbesondere hat man daher $u(0,t) = \frac{1}{2}(f(ct) + f(-ct)) = 0$, falls $ct > R$ bzw. $t > T := \frac{R}{c}$.
Ist $|x| < ct - R$, so gilt im Fall $x \geq 0$: $0 \leq x < ct - R$ bzw. $x - ct < -R$ und (wegen $ct > R$) $x + ct > x + R > R$. Damit folgt $f(x-ct) = 0$ und $f(x+ct) = 0$. Falls $x < 0$, hat man $0 < -x < ct - R$ und somit $x + ct > R$ und $x - ct < -R$. Auch in diesem Fall folgt $f(x-ct) = f(x+ct) = 0$. Zusammengefasst gilt also $u(x,t) = 0$ für $|x| < ct - R$.
Analog argumentiert man im Gebiet $|x| > ct + R$.

(c) Ist nun g nicht mehr identisch 0, so gilt nach dem d'Alembert-Prinzip

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(f(x-ct) + f(x+ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,\mathrm{d}y$$

In dem Gebiet wo $|x| < ct - R$ oder $|x| > ct + R$ gilt wie in Teilaufgabe (b) $f(x-ct) = f(x+ct) = 0$.

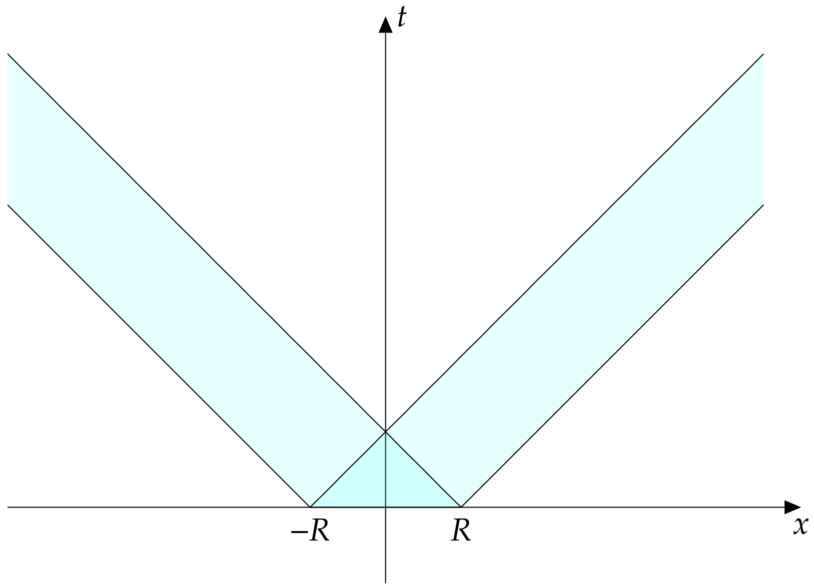

Abbildung 1: Das von den Anfangsbedingungen $g \equiv 0$, $f = 0$ für $|x| > R$ beeinflusse Gebiet in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

Wegen

$$\begin{aligned} g(x+ct) &= 0 \quad \text{für} \quad |x+ct| > R, \\ g(x-ct) &= 0 \quad \text{für} \quad |x-ct| > R. \end{aligned}$$

folgt wie in (b) im Gebiet $|x| < ct - R$ oder $|x| > ct + R$, dass $g(x+ct) = g(x-ct) = 0$. Damit

$$u(x,t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2c} \int_{-R}^{R} g(y)\,\mathrm{d}y =: U.$$

2. **Transportgleichung**

(a) Bestimmen Sie die Lösung der homogenen Rand-Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} &\partial_t u(x,t) - \partial_x u(x,t) = 0, && (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_+ \\ &u(x,0) = 2, && x \in (0,1) \\ &u(1,t) = \frac{2}{1+t^2}, && t \in \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

(b) Finden Sie die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} &\partial_t u(x,t) + \tfrac{3}{2}\partial_x u(x,t) = \tfrac{1}{2}e^{x+t}, && (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ &u(x,0) = 0, && x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

LÖSUNG:

(a) Die allgemeine Lösung der homogenen Transportgleichung $\partial_t u(x,t) + c\partial_x u(x,t) = 0$ ist

$$u(x,t) = \psi(x - ct)$$

mit einer beliebigen $\mathscr{C}^1$-Funktion ψ (d.h. die Lösungen sind konstant auf Geraden $x - ct = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$). Es gilt also hier wegen $c = -1$, dass $u(x,t) = \psi(x+t)$ für $x \in (0,1)$ und $t \in \mathbb{R}_+$. Die Anfangsbedingung $u(x,0) = 2$ für $x \in (0,1)$ impliziert, dass $\psi(x) = 2$ für $0 < x < 1$, und damit

$$\begin{aligned} u(x,t) = \psi(x+t) = 2 \quad &\text{für} \quad 0 < x + t < 1, \quad 0 < x < 1 \\ &\text{bzw.} \quad 0 < t < 1 - x, \quad 0 < x < 1. \end{aligned}$$

Ist $(\xi, \tau) \in (0,1) \times \mathbb{R}_+$ ein Punkt der (x,t)-Ebene mit $\tau \geq 1 - \xi$ $(0 < \xi < 1)$, so gilt für u auf der Geraden $x + t = \xi + \tau$, bzw. $x(t) = -t + \xi + \tau$ wegen der Randbedingung

$$u(1, -1 + \xi + \tau) = \frac{2}{1 + (\xi + \tau - 1)^2}$$

und damit

$$u(x,t) = \frac{2}{1 + (x + t - 1)^2}, \quad t \geq 1 - x, \quad 0 < x < 1.$$

(b) Die allgemeine Lösung inhomogenen Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) + c\partial_x u(x,t) &= f(x,t) \\ u(x,0) &= g(x) \end{aligned}$$

ist gegeben durch

$$u(x,t) = g(x - ct) + \int_0^t f(x + c(s-t), s)\,\mathrm{d}s.$$

Im vorliegenden Fall hat man also

$$\begin{aligned} u(x,t) &= 0 + \tfrac{1}{2}\int_0^t e^{x + \frac{3}{2}(s-t) + s}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}e^{x - \frac{3}{2}t}\int_0^t e^{\frac{5}{2}s}\,\mathrm{d}s \\ &= \tfrac{1}{2}e^{x-t}\tfrac{2}{5}(e^{\frac{5}{2}t} - 1) = \frac{e^x}{5}\left(e^t - e^{-\frac{3}{2}t}\right) \end{aligned}$$

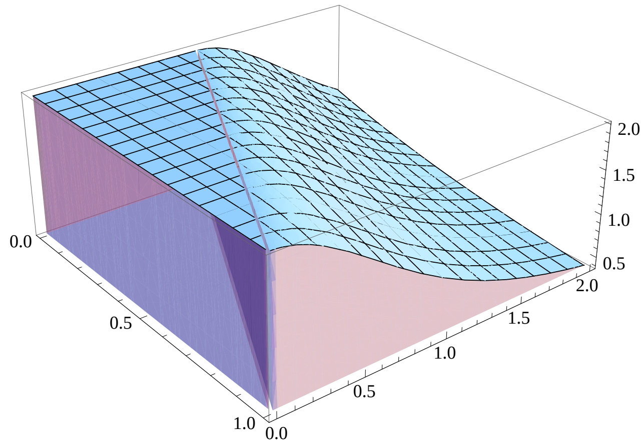

Abbildung 2: Die Lösung des Rand-Anfangswertproblems aus Aufgabe 2 (a).

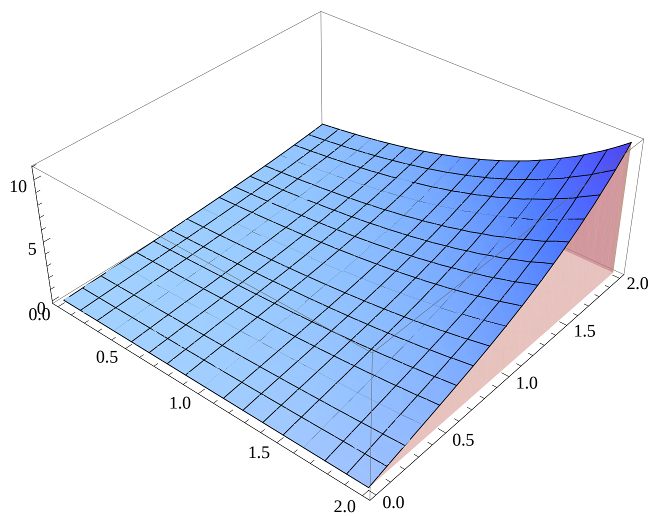

Abbildung 3: Die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems aus Aufgabe 2 (b).