Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2014/15
27.10.2014

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1:

(a) Die Differentialgleichung ist eine lineare Differentialgleichung. Ihre Lösung ist

$$\begin{aligned} y(x) &= Ce^{\int -\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x} + e^{\int -\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x}\int e^{\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \\ &= Ce^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{1}{x}}\int e^{-\frac{1}{x}}\mathrm{d}(-\frac{1}{x}) \\ &= Ce^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{1}{x}}e^{-\frac{1}{x}} \\ &= Ce^{\frac{1}{x}} + 1. \end{aligned}$$

(b) Die gegebene Gleichung ist äquivalent zu

$$y'(x) = \frac{2}{x\ln x}y(x) + \frac{1}{x},$$

d.h. wir haben wieder eine lineare Differentialgleichung. Ihre Lösung ist durch

$$y(x) = \underbrace{0}_{=y_0} e^{\int_e^x \frac{2}{t\ln t}\mathrm{d}t} + e^{\int_e^x \frac{2}{t\ln t}\mathrm{d}t}\int\limits_e^x e^{-\int_e^x \frac{2}{t\ln t}\mathrm{d}t}\frac{1}{t}\mathrm{d}t$$

gegeben. Es gilt

$$\underbrace{\int\limits_e^x}_{=x_0} \frac{2}{t\ln t}\mathrm{d}t = \int\limits_e^x \frac{2}{\ln t}\mathrm{d}\ln t = 2\ln(\ln t)\Big|_{t=e}^{x} = 2\ln(\ln x).$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} y(x) &= \underbrace{0}_{=y_0}.e^{2\ln(\ln x)} + e^{2\ln(\ln x)}\int\limits_e^x e^{-2\ln(\ln t)}\frac{1}{t}\mathrm{d}t \\ &= \ln^2 x\int\limits_e^x \ln^{-2}\mathrm{d}\ln t = \ln^2 x(-1)\ln^{-1} t\Big|_{t=e}^{x} = \ln^2 x - \ln x. \end{aligned}$$

(c) Zuerst teilen wir die Differentialgleichung durch $\mathrm{d}x$:

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} + y(x) + \frac{1}{x}y(x) - \frac{1}{x} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad y'(x) = \Big(-1 - \frac{1}{x}\Big)y(x) + \frac{1}{x}.$$

Die Lösung dieser linearen Differentialgleichung ist

$$
\begin{aligned}
y(x) &= Ce^{\int \left(-1-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x} + e^{\int \left(-1-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x} \int e^{\int \left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x} \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\
&= Ce^{-x-\ln x} + e^{-x-\ln x} \int e^{x+\ln x} \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\
&= C\frac{1}{x}e^{-x} + \frac{1}{x}e^{-x} \int e^{x} x \frac{1}{x}\mathrm{d}x = C\frac{1}{x}e^{-x} + \frac{1}{x}e^{-x}e^{x} = C\frac{1}{x}e^{-x} + \frac{1}{x}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2:

1. Die Differentialgleichung ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen. Es ist klar, dass $y = 0$ eine Lösung der Differentialgleichung ist. Eine andere Lösung finden wir durch

$$
\begin{aligned}
\int_0^y \frac{1}{3\eta^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}\eta &= \int_2^x 1\mathrm{d}t \\
\eta^{\frac{1}{3}}\Big|_{\eta=0}^{y} &= t\Big|_{t=2}^{x} \\
y &= (x-2)^3
\end{aligned}
$$

2. Das ist wieder eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen. Ihre Lösung ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
\int y^2 dy &= \int (1-2x)\mathrm{d}x \\
\frac{1}{3}y^3 &= x - x^2 + C \\
y &= \sqrt[3]{3(x-x^2+C)}
\end{aligned}
$$

3. Zuerst teilen wir die Differentialgleichung durch $\mathrm{d}x$:

$$
(1+x)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = -xy(x) \quad \Longleftrightarrow \quad y'(x) = -\frac{x}{1+x}y(x),
$$

d.h. wir haben wieder eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen. Ihre Lösung ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y &= \int \frac{-x}{1+x}\mathrm{d}x \\
\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y &= \int \left(\frac{1}{1+x} - 1\right)\mathrm{d}x \\
\ln y &= \ln(1+x) - x + C \\
y &= C(1+x)e^{-x}
\end{aligned}
$$