Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2014/15
31.10.2014

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 1:

(a) (i) Hier haben wir eine Bernoulli-Differentialgleichung mit $\alpha = \frac{1}{3}$. Mittels $z := y^{1-\frac{1}{3}} = y^{\frac{2}{3}}$ erhalten wir die folgende lineare Differentialgleichung

$$z' - \frac{1}{x}z - x = 0.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$z(x) = Ce^{\int \frac{1}{x}dx} + e^{\int \frac{1}{x}dx} \int e^{-\int \frac{1}{x}dx} x dx = Cx + x^2.$$

Es folgt

$$y(x) = z^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(Cx + x^2)^3}.$$

Mit Hilfe vom Anfangswert bestimmen wir die Konstante C

$$y(1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{(C+1)^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -1,$$

d.h. die Lösung der gegebenen Differentialgleichung ist

$$y(x) = \sqrt{(x^2 - x)^3}.$$

(ii) Das ist wieder eine Bernoulli-Differentialgleichung, hier mit $\alpha = -1$. Mittels $z := y^2$ erhalten wir

$$z' + \frac{2}{x}z - 3 = 0.$$

Das ist wieder eine lineare Differentialgleichung und ihre Lösung ist

$$z(x) = C\frac{1}{x^2} + x.$$

Folglich

$$y(x) = \pm\sqrt{z} = \pm\sqrt{C\frac{1}{x^2} + x}.$$

Mit Hilfe vom Anfangswert bestimmen wir die Konstante C

$$y(1) = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad \pm\sqrt{C+1} = -1 \quad \Rightarrow \quad C = 0 \text{ and } y(x) = -\sqrt{x}.$$

(b) Für $\phi(x) = x$ ist $\phi'(x) = 1$ und

$$\phi' = (\phi - x)^2 + 1 \quad\Longleftrightarrow\quad 1 = (x - x) + 1,$$

d.h. $\phi(x) = x$ ist zwar eine Lösung der gegebenen Differentialgleichung. Die Gleichung ist äquivalent zu

$$y' + 2xy - y^2 = 1 + x^2$$

und das ist eine Riccati-Differentialgleichung mit $g(x) = 2x, h(x) = -1, k(x) = 1 + x^2$. Durch die Substitution $u = y - \phi$ erhalten wir eine Bernoulli-Differentialgleichung (mit $\alpha = 2$) für u. Die weitere Substitution $z = u^{-1}$ führt auf die lineare Differentialgleichung

$$z' - (\underbrace{2x}_{=g(x)} + 2\underbrace{x}_{=\phi(x)}\underbrace{(-1)}_{=h(x)})z - \underbrace{(-1)}_{=h(x)} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad z' + 1 = 0.$$

Die Lösung dieser linearen Gleichung ist $z = -x + C$. Folglich $u = z^{-1} = \frac{1}{C-x}$ (definiert für $x \neq C$). Die übrige Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung ist also

$$y(x) = u(x) + \phi(x) = \frac{1}{C - x} + x.$$

Wir bestimmen die Konstante C mit Hilfe vom Anfangswert

$$y(0) = \frac{1}{2} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{1}{C} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow C = 2,$$

d.h.

$$y(x) = \frac{1}{2 - x} + x \quad (x \neq 2).$$

Aufgabe 2:

(a) Für

$$\underbrace{(3x^2y - 1)}_{=P(x,y)}\,dx + \underbrace{(x^3 + 6y - y^2)}_{=Q(x,y)}\,dy = 0$$

gilt es $P_y = 3x^2 = Q_x$. Also ist die Differentialgleichung exakt. Eine Stammfunktion ist gegeben durch

$$F(x, y) = \int P(x, y)dx = \int (3x^2y - 1)dx = x^3y - x + c(y).$$

Um $c(y)$ zu bestimmen, nutzen wir

$$\partial_y F(x, y) \overset{!}{=} Q(x, y) \quad\Longleftrightarrow\quad c'(y) = 6y - y^2 \quad \Rightarrow c(y) = 3y^2 - \frac{1}{3}y^3.$$

Folglich ist die Lösung der gegebenen Differentialgleichung

$$x^3y - x + 3y^2 - \frac{1}{3}y^3 = C.$$

Die Konstante C bestimmen wir mit Hilfe vom Anfangswert: $C = F(x_0, y_0) = 18$, d.h. die Lösung dem gegebenen Anfangswertproblem ist

$$x^3y - x + 3y^2 - \frac{1}{3}y^3 = 18.$$

(b) (i) Die gegebene Gleichung ist äquivalent zu

$$\underbrace{-2xy}_{=P(x,y)}\,dx + \underbrace{(3x^2-y^2)}_{=Q(x,y)}\,dy = 0.$$

Es gilt $P_y = -2x \neq 6x = Q_x$, also ist die Differentialgleichung nicht exakt. Wir suchen einen integrierenden Faktor $\mu = \mu(y)$. Für ihn gilt es

$$\mu'(y) = \frac{Q_x - P_y}{P}\mu(y) \quad\Longleftrightarrow\quad \mu'(y) = -\frac{4}{y}\mu(y) \quad \Rightarrow \mu(y) = y^{-4}.$$

Jetzt multiplizieren wir die gegebene Differentialgleichung mit $\mu(y) = y^{-4}$ und so erhalten wir eine exakte Differentialgleichung. Ihre Lösung ist

$$-\frac{x^2}{y^3} + \frac{1}{y} = C.$$

(ii) Hier gilt es $P_y = 1 \neq -(2x+1)$, also ist die gegebene Differentialgleichung nicht exakt. Wir suchen einen integrierenden Faktor $\mu = \rho(\underbrace{x^2+y^2}_{=:\varphi(x,y)})$. Es gilt

$$\rho'(\varphi) = \Big(\frac{Q_x - P_y}{\varphi_y P - \varphi_x Q}\Big)\rho(\varphi) \quad\Longleftrightarrow\quad \rho'(\varphi) = -\frac{1}{\varphi}\rho(\varphi) \quad \Rightarrow \rho = \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{x^2+y^2}.$$

Jetzt multiplizieren wir die gegebene Differentialgleichung mit $\mu(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ und so erhalten wir eine exakte Differentialgleichung. Ihre Lösung ist

$$\arctan\left(\frac{x}{y}\right) - y = C.$$

Aufgabe 3:

(a) (i) Hier haben wir eine Bernoulli-Differentialgleichung mit $\alpha = -2$. Mittels $z := y^3$ erhalten wir die folgende lineare Differentialgleichung

$$z' - 3z - 3e^{-2x} = 0.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$z(x) = Ce^{\int 3dx} + e^{\int 3dx}\int e^{-\int 3dx}3e^{-2x}dx = Ce^{3x} - \frac{3}{5}e^{-2x}.$$

Es folgt

$$y(x) = z^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{Ce^{3x} - \frac{3}{5}e^{-2x}}.$$

Mit Hilfe vom Anfangswert bestimmen wir die Konstante C

$$y(0) = 2 \quad\Longleftrightarrow\quad \sqrt[3]{C - \frac{3}{5}} = 2 \quad\Rightarrow\quad C = \frac{43}{5},$$

d.h. die Lösung der gegebenen Differentialgleichung ist

$$y(x) = \sqrt[3]{\frac{43}{5}e^{3x} - \frac{3}{5}e^{-2x}}.$$

(ii) Das ist wieder eine Bernoulli-Differentialgleichung, hier mit $\alpha = \frac{1}{2}$. Mittels $z := y^{\frac{1}{2}}$ erhalten wir

$$z' + \frac{1}{2x}z - \frac{1}{2} = 0.$$

Das ist wieder eine lineare Differentialgleichung und ihre Lösung ist

$$z(x) = C\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{3}x. \quad \text{(definiert nur für } x > 0\text{)}$$

Folglich

$$y(x) = z^2(x) = \Big(C\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{3}x\Big)^2.$$

Mit Hilfe vom Anfangswert bestimmen wir die Konstante C

$$y(1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Big(C + \frac{1}{3}\Big)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{1}{3}$$

und

$$y(x) = \Big(-\frac{1}{3\sqrt{x}} + \frac{1}{3}x\Big)^2 \quad \text{(definiert nur für } x > 0\text{).}$$

(b) Für $\phi(x) = \frac{1}{x}$ ist $\phi'(x) = -\frac{1}{x^2}$ und

$$\phi' = \phi^2 - \frac{\phi}{x} - \frac{1}{x^2} \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2},$$

d.h. $\phi(x) = \frac{1}{x}$ ist zwar eine Lösung der gegebenen Differentialgleichung. Die Gleichung ist äquivalent zu

$$y' + \frac{1}{x}y - y^2 = -\frac{1}{x^2}$$

und das ist eine Riccati-Differentialgleichung mit $g(x) = \frac{1}{x}, h(x) = -1, k(x) = -\frac{1}{x^2}$. Durch die Substitution $u = y - \phi$ erhalten wir eine Bernoulli-Differentialgleichung (mit $\alpha = 2$) für u. Die weitere Substitution $z = u^{-1}$ führt auf die lineare Differentialgleichung

$$z' - (\underbrace{\frac{1}{x}}_{=g(x)} + 2\underbrace{\frac{1}{x}}_{=\phi(x)}\underbrace{(-1)}_{=h(x)})z - \underbrace{(-1)}_{=h(x)} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z' + \frac{1}{x}z + 1 = 0.$$

Die Lösung dieser linearen Gleichung ist $z = \frac{C-x^2}{2x}$. Folglich $u = z^{-1} = \frac{2x}{C-x^2}$ (definiert für $x^2 \neq C$). Die übrige Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung ist also

$$y(x) = u(x) + \phi(x) = \frac{2x}{C - x^2} + \frac{1}{x}.$$

Wir bestimmen die Konstante C mit Hilfe vom Anfangswert

$$y(1) = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2}{C-1} + 1 = 2 \quad \Rightarrow C = 3,$$

d.h.

$$y(x) = \frac{2x}{3 - x^2} + \frac{1}{x} \quad (x \neq \pm\sqrt{3}).$$

Aufgabe 4:

(a) Die gegebene Differentialgleichung ist äquivalent zu

$$\underbrace{(4xy+1)}_{=P(x,y)}dx + \underbrace{(2x^2+\cos y)}_{=Q(x,y)}dy = 0.$$

Es gilt $P_y = 4x = Q_x$, also ist die Differentialgleichung exakt. Eine Stammfunktion ist gegeben durch

$$F(x,y) = \int Q(x,y)dy = \int (2x^2+\cos y)dy = 2x^2y + \sin y + c(x).$$

Um $c(x)$ zu bestimmen, nutzen wir

$$\partial_x F(x,y) \stackrel{!}{=} P(x,y) \quad \Longleftrightarrow \quad c'(x) = 1 \quad \Rightarrow c(x) = x.$$

Folglich ist die Lösung der gegebenen Differentialgleichung

$$2x^2y + x + \sin y = C.$$

(b) (i) Die gegebene Gleichung ist äquivalent zu

$$\underbrace{(3xy+y^2)}_{=P(x,y)}dx + \underbrace{(x^2+xy)}_{=Q(x,y)}dy = 0.$$

Es gilt $P_y = 3x + 2y \neq 2x + y = Q_x$, also ist die Differentialgleichung nicht exakt. Wir suchen einen integrierenden Faktor $\mu = \mu(x)$. Für ihn gilt es

$$\mu'(x) = \frac{P_y - Q_x}{Q}\mu(y) \quad \Longleftrightarrow \quad \mu'(x) = \frac{1}{x}\mu(x) \quad \Rightarrow \mu(x) = x.$$

Jetzt multiplizieren wir die gegebene Differentialgleichung mit $\mu(x) = x$ und so erhalten wir eine exakte Differentialgleichung. Ihre Lösung ist

$$x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 = C.$$

(ii) Hier gilt es $P_y = 2xy \neq 3\frac{x^2}{y} + 6xy$, also ist die gegebene Differentialgleichung nicht exakt. Wir suchen einen integrierenden Faktor $\mu = \rho(\underbrace{\frac{y}{x}}_{=:\varphi(x,y)})$. Es gilt

$$\rho'(\varphi) = \Big(\frac{Q_x - P_y}{\varphi_y P - \varphi_x Q}\Big)\rho(\varphi) \quad \Longleftrightarrow \quad \rho'(\varphi) = \frac{1}{\varphi}\rho(\varphi) \quad \Rightarrow \rho = \varphi = \frac{y}{x}.$$

Jetzt multiplizieren wir die gegebene Differentialgleichung mit $\mu(x,y) = \frac{y}{x}$ und so erhalten wir eine exakte Differentialgleichung. Ihre Lösung ist

$$x^2y + xy^3 = C.$$