Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2014/15
24.11.2014

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 1:

(a) Die gegebene Gleichung ist äquivalent zu

$$y'' + \frac{2}{t}y' - y = 0.$$

Für $y_1(t) = \frac{e^t}{t}$ gilt es

$$y_1'(t) = \frac{e^t}{t^2}(t-1), \quad y_1''(t) = \frac{e^t}{t^3}(t^2 - 2t + 2)$$

und

$$y'' + \frac{2}{t}y' - y = \frac{e^t}{t^3}(t^2 - 2t + 2) + \frac{2}{t}\frac{e^t}{t^2}(t-1) - \frac{e^t}{t} = 0,$$

d.h. $y_1(t) = \frac{e^t}{t}$ ist zwar eine Lösung der Gleichung (1).
Sei $y_2(t) = v(t)y_1(t)$. Dann für v gilt es die folgende Gleichung

$$\begin{aligned} v'' + v'\Big(\frac{2\frac{e^t}{t^2}(t-1)}{\frac{e^t}{t}} + \frac{2}{t}\Big) &= 0 \\ v'' + 2\underbrace{v'}_{=:w} &= 0 \\ w' + 2w &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösung dieser linearen Differentialgleichung mit getrennten Variablen ist

$$w(t) = e^{-2t} \quad \Rightarrow \quad v(t) = \int w(t)dt = -\frac{1}{2}e^{-2t} \quad \Rightarrow \quad y_2(t) = v(t)y_1(t) = -\frac{e^{-t}}{2t}$$

Für die Wronski-Determinante des Systems y_1, y_2 gilt es

$$\omega(t) = \det\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \frac{e^t}{t} & -\frac{e^{-t}}{2t} \\ \frac{e^t}{t^2}(t-1) & \frac{e^{-t}}{2t^2}(t+1) \end{pmatrix} = \frac{1}{t^2} \neq 0,$$

d.h. y_1 und y_2 sind linear unabhängig.

(b) Für $y_1(x) = e^{x^2}$ gilt es

$$y_1'(x) = 2xe^{x^2}, \quad y_1''(x) = (2 + 4x^2)e^{x^2}$$

und

$$y'' - \frac{1}{x}y' - 4x^2 y = (2 + 4x^2)e^{x^2} - 2e^{x^2} - 4x^2e^{x^2} = 0,$$

d.h. $y_1(x) = e^{x^2}$ ist zwar eine Lösung der gegebenen homogenen Gleichung.
Sei $y_2(x) = v(x)y_1(x)$. Dann für v gilt es die folgende Gleichung

$$\begin{aligned} v'' + v'\Big(\frac{22xe^{x^2}}{e^{x^2}} - \frac{1}{x}\Big) &= -\frac{4x^2}{e^{x^2}} \\ v'' + \underbrace{v'}_{=:w}\Big(4x - \frac{1}{x}\Big) &= -\frac{4x^2}{e^{x^2}} \\ w' = \Big(\frac{1}{x} - 4x\Big)w &- \frac{4x^2}{e^{x^2}} \end{aligned}$$

Die Lösung dieser linearen Differentialgleichung ist

$$w(x) = C_1 xe^{-2x^2} - 2xe^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad v(x) = \int w(x)dx = C_2 e^{-2x^2} + e^{-x^2}$$
$$\Rightarrow \quad y_2(x) = v(x)y_1(x) = C_3 e^{-x^2} + 1$$

Folglich ist die allgemeine Lösung der gegebenen Gleichung

$$y(x) = C_4 y_1(x) + y_2(x) = C_4 e^{x^2} + C_3 e^{-x^2} + 1$$

Aufgabe 2:

(a) (i) Das charakteristische Polynom dieser Gleichung ist

$$p(\lambda) = \lambda^4 - 1.$$

Die Nullstellen von $p(\lambda) = 0$ sind $\lambda_{1,2} = \pm 1, \lambda_{3,4} = \pm i$. Folglich ist die Lösung dieser Gleichung durch

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \sin x + C_4 \cos x.$$

(ii) Das charakteristische Polynom dieser Gleichung ist

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 9.$$

Die Gleichung $p(\lambda) = 0$ hat eine doppelte Nullstelle $\lambda_{1,2} = -3$. Folglich ist die allgemeine Lösung dieser Gleichung durch

$$y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 xe^{-3x}$$

gegeben. Mit Hilfe von den Anfangswerten bestimmen wir die Konstanten C_1 und C_2:

$$\begin{aligned} y(0) = 2 \quad &\Longleftrightarrow \quad C_1 = 2 \\ y'(0) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad -3C_1 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow C_2 = 6, \end{aligned}$$

d.h.

$$y(x) = 2e^{-3x} + 6xe^{-3x}.$$

(iii) Das charakteristische Polynom dieser Gleichung ist

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 13.$$

Die Nullstellen der Gleichung $p(\lambda) = 0$ sind $\lambda_{1,2} = -3 \pm 2i$. Folglich ist die allgemeine Lösung dieser Gleichung durch

$$y(x) = C_1 e^{-3x} \sin(2x) + C_2 e^{-3x} \cos(2x)$$

gegeben. Mit Hilfe von den Anfangswerten bestimmen wir die Konstanten C_1 und C_2:

$$\begin{aligned} y(0) = 3 &\iff C_2 = 3 \\ y'(0) = -1 &\iff 2C_1 - 3C_2 = -1 \quad \Rightarrow C_1 = 4, \end{aligned}$$

d.h.

$$y(x) = e^{-3x}\Big(4\sin(2x) + 3\cos(2x)\Big).$$

(b) Von $y_1(x) = 1 = e^{0x}, y_2(x) = e^{-2x}, y_3(x) = xe^{-2x}, y_4(x) = \cos x, y_5(x) = \sin x$ folgt es, dass $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = -2, \lambda_{4,5} = \pm i$ Nullstellen der charakteristischen Gleichung $p(\lambda) = 0$ sind. D.h.

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda+2)^2(\lambda-i)(\lambda+i) = \lambda^5 + 4\lambda^4 + 5\lambda^3 + 4\lambda^2 + 4\lambda$$

und folglich ist die entsprechende Differentialgleichung

$$\underbrace{1}_{=a_5} y^{(5)} + \underbrace{4}_{=a_4} y^{(4)} + \underbrace{5}_{=a_3} y''' + \underbrace{4}_{=a_2} y'' + \underbrace{4}_{=a_1} y' = 0.$$

Aufgabe 3:

(a) Die gegebene Gleichung ist äquivalent zu

$$y'' - \frac{2}{e^x+1}y' - \frac{e^x}{e^x+1}y = 0.$$

Für $y_1(x) = e^x - 1$ gilt es

$$y_1'(x) = y_1''(x) = e^x$$

und

$$y'' - \frac{2}{e^x+1}y' - \frac{e^x}{e^x+1}y = \frac{e^x(e^x+1) - 2e^x - e^x(e^x-1)}{e^x+1} = 0,$$

d.h. $y_1(x) = e^x - 1$ ist zwar eine Lösung der Gleichung (3).
Sei $y_2(x) = v(x)y_1(x)$. Dann für v gilt es die folgende Gleichung

$$\begin{aligned} v'' + v'\Big(\frac{2e^x}{e^x-1} - \frac{2}{e^x+1}\Big) &= 0 \\ v'' + 2\underbrace{v'}_{=:w}\Big(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\Big) &= 0 \\ w' + 2w\Big(\frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1} - 1\Big) &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösung dieser linearen Differentialgleichung mit getrennten Variablen ist

$$\begin{aligned} w(t) = &\frac{e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2} \quad \Rightarrow \quad v(x) = \int w(x)dx = -\frac{1}{2(e^{2x}-1)} \\ &\Rightarrow \quad y_2(x) = v(x)y_1(x) = -\frac{1}{2(e^x+1)} \end{aligned}$$

Für die Wronski-Determinante des Systems y_1, y_2 gilt es

$$\omega(x) = \det\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} e^x - 1 & -\frac{1}{2(e^x+1)} \\ e^x & \frac{e^x}{2(e^x+1)^2} \end{pmatrix} = \frac{e^{2x}}{(e^x+1)^2} \neq 0,$$

d.h. y_1 und y_2 sind linear unabhängig.

(b) Für $y_1(x) = x\sin x$ gilt es

$$y_1'(x) = \sin x + x\cos x, \quad y_1''(x) = 2\cos x - x\sin x$$

und

$$x^2y'' - 2xy' + (x^2+2)y = x^2(2\cos x - x\sin x) - 2x(\sin x + x\cos x) + (x^2+2)x\sin x = 0,$$

d.h. $y_1(x) = x\sin x$ ist zwar eine Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung. Gleichung (4) ist äquivalent zu

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \Big(1 + \frac{2}{x^2}\Big)y = x.$$

Sei $y_2(x) = v(x)y_1(x)$. Dann für v gilt es die folgende Gleichung

$$\begin{aligned} v'' + v'\Big(\frac{2(\sin x + x\cos x)}{x\sin x} - \frac{2}{x}\Big) &= \frac{x}{x\sin x} \\ v'' + \underbrace{v'}_{=:w} 2\frac{\cos x}{\sin x} &= \frac{1}{\sin x} \\ w' = -2\frac{\cos x}{\sin x}w + \frac{1}{\sin x} \end{aligned}$$

Die Lösung dieser linearen Differentialgleichung ist

$$w(x) = C_1\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} \quad \Rightarrow \quad v(x) = \int w(x)dx = C_2\frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\sin x}$$
$$\Rightarrow \quad y_2(x) = v(x)y_1(x) = C_2 x\cos x + x$$

Folglich ist die allgemeine Lösung der gegebenen Gleichung

$$y(x) = C_3y_1(x) + y_2(x) = C_3x\sin x + C_2x\cos x + x$$

Aufgabe 4:

(a) (i) Das charakteristische Polynom dieser Gleichung ist

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2+1)^2.$$

Die Gleichung $p(\lambda) = 0$ hat zwei doppelte Nullstellen $\lambda_{1,2} = i, \lambda_{3,4} = -i$. Folglich ist die allgemeine Lösung dieser Gleichung gegeben durch

$$y(x) = C_1\sin x + C_2x\sin x + C_3\cos x + C_4x\cos x,$$

(ii) Das charakteristische Polynom dieser Gleichung ist

$$p(\lambda) = 9\lambda^2 + 6\lambda + 5.$$

Die Nullstellen von $p(\lambda) = 0$ sind $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{3} \pm \frac{2}{3}i$. Folglich ist die allgemeine Lösung dieser Gleichung durch

$$y(x) = C_1e^{-\frac{1}{3}x}\sin\Big(\frac{2}{3}x\Big) + C_2e^{-\frac{1}{3}x}\cos\Big(\frac{2}{3}x\Big)$$

gegeben. Mit Hilfe von den Anfangswerten bestimmen wir die Konstanten C_1 und C_2:

$$\begin{aligned} y(0) = 6 \quad &\Longleftrightarrow \quad C_2 = 6 \\ y'(0) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{2}{3}C_1 - \frac{1}{3}C_2 = 0 \quad \Rightarrow C_1 = 3, \end{aligned}$$

d.h.

$$y(x) = 3e^{-\frac{1}{3}x}(\sin\Big(\frac{2}{3}x\Big) + 2\cos\Big(\frac{2}{3}x\Big)).$$

(iii) Das charakteristische Polynom dieser Gleichung ist

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

Die Nullstellen von $p(\lambda) = 0$ sind $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$. Folglich ist die allgemeine Lösung dieser Gleichung gegeben durch

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}.$$

Mit Hilfe von den Anfangswerten bestimmen wir die Konstanten $C_j, j = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} y(0) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad C_1 + C_2 + C_3 = 0 \\ y'(0) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad C_1 + 2C_2 + 3C_3 = 0 \\ y''(0) = 2 \quad &\Longleftrightarrow \quad C_1 + 4C_2 + 9C_3 = 0 \\ &\Rightarrow C_1 = C_3 = 1, C_2 = -2, \end{aligned}$$

d.h. die Lösung des gegebenen Anfangswertproblems ist

$$y(x) = e^x - 2e^{2x} + e^{3x}.$$

(b) Von $y_1(x) = e^{-x}\sin(\sqrt{2}x), y_2(x) = xe^{-x}\sin(\sqrt{2}x), y_3(x) = e^{-x}\cos(\sqrt{2}x), y_4(x) = xe^{-x}\cos(\sqrt{2}x)$ folgt es, dass $\lambda_{1.2} = -1 + \sqrt{2}i, \lambda_{3,4} = -1 - \sqrt{2}i$ Nullstellen der charakteristischen Gleichung $p(\lambda) = 0$ sind. D.h.

$$p(\lambda) = (\lambda - (-1 + \sqrt{2}i))^2(\lambda - (-1 - \sqrt{2}i))^2 = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 10\lambda^2 + 12\lambda + 9$$

und folglich ist die entsprechende Differentialgleichung

$$\underbrace{1}_{=a_4} y^{(4)} + \underbrace{4}_{=a_3} y''' + \underbrace{10}_{=a_2} y'' + \underbrace{12}_{=a_1} y' + \underbrace{9}_{a_0} y = 0.$$