Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2014/15
1.12.2014

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 1:

(a) Das charakteristische Polynom dieser Gleichung ist

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 9 = (\lambda - 3)(\lambda + 3)$$

und seine Nullstellen sind $\lambda_{1,2} = \pm 3$. Folglich ist die Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung durch

$$y_h(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$$

gegeben. Die rechte Seite der inhomogenen Gleichung ist $e^{3x}\cos x$, d.h. $m = 0, \sigma = 3, \omega = 1$. Da $\sigma + i\omega = 3 + i$ keine Nullstelle von p ist, machen wir den folgenden Ansatz für die spezielle Lösung y_p:

$$y_p(x) = ae^{3x}\sin x + be^{3x}\cos x, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Wir rechnen

$$y_p'(x) = (3a - b)e^{3x}\sin x + (a + 3b)e^{3x}\cos x,$$
$$y_p''(x) = (8a - 6b)e^{3x}\sin x + (6a + 8b)e^{3x}\cos x$$

und setzen die in die gegebene inhomogene Gleichung ein:

$$(8a - 6b)e^{3x}\sin x + (6a + 8b)e^{3x}\cos x - 9(ae^{3x}\sin x + be^{3x}\cos x) \overset{!}{=} e^{3x}\cos x$$
$$(-a - 6b)e^{3x}\sin x + (6a - b)e^{3x}\cos x \overset{!}{=} e^{3x}\cos x$$

Koeffizientenvergleich führt auf

$$-a - 6b = 0 \quad \text{und} \quad 6a - b = 1,$$

also $a = \frac{6}{37}, b = -\frac{1}{37}$. Die allgemeine Lösung ist somit

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + \frac{6}{37}e^{3x}\sin x - \frac{1}{37}e^{3x}\cos x.$$

(b) Das charakteristische Polynom dieser Gleichung ist

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

und seine Nullstellen sind $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$. Folglich ist die Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung durch

$$y_h(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x}$$

gegeben. Die rechte Seite der inhomogenen Gleichung ist $(3x^2 - 12x)e^x$, d.h. $m = 2, \sigma = 1, \omega = 0$. Da $\sigma + i\omega = 1$ eine Nullstelle von p mit Vielfachheit 1 ist, machen wir den folgenden Ansatz für die spezielle Lösung y_p:

$$y_p(x) = x(ax^2 + bx + d)e^x = (ax^3 + bx^2 + dx)e^x, \quad a, b, d \in \mathbb{R}.$$

Wir rechnen

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= \Big(ax^3 + (3a + b)x^2 + (2b + d)x + d\Big)e^x, \\ y_p''(x) &= \Big(ax^3 + (6a + b)x^2 + (6a + 4b + d)x + 2b + 2d\Big)e^x \end{aligned}$$

und setzen die in die gegebene inhomogene Gleichung ein:

$$\begin{aligned} \Big(ax^3 + (6a + b)x^2 + (6a + 3b + d)x + 2b + 2d\Big)e^x - 3\Big(ax^3 + (3a + b)x^2 + (2b + d)x + d\Big)e^x \\ +2(ax^3 + bx^2 + dx)e^x \overset{!}{=} (3x^2 - 12x)e^x \\ \Big(-3ax^2 + (6a - 2b)x + 2b - d\Big)e^x \overset{!}{=} (3x^2 - 12x)e^x \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich führt auf

$$-3a = 3, \quad 6a - 2b = -12 \text{ und } \quad 2b - d = 0,$$

also $a = -1, b = 3, d = 6$. Die allgemeine Lösung ist somit

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1e^{2x} + C_2e^x + (-x^3 + 3x^2 + 6x)e^x.$$

Aufgabe 2:

(a) Durch die Substitution $x = e^t, u(t) = y(e^t)$ ist die gegebene Differentialgleichung zu

$$\begin{aligned} \underbrace{u''(t) - u'(t)}_{x^2y''(x)} + 3\underbrace{u'(t)}_{xy'(x)} + u(t) = 0, \\ u'' + 2u' + u = 0 \end{aligned}$$

äquivalent. Das ist eine homogene lineare Differentialgleichung für u. Ihr charakteristisches Polynom ist

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2.$$

Da p eine doppelte Nullstelle $\lambda_{1,2} = -1$ hat, ist die allgemeine Lösung durch

$$u(t) = C_1e^{-t} + C_2te^{-t}$$

gegeben und folglich $(t = \ln x)$

$$y(x) = C_1\frac{1}{x} + C_2\frac{\ln x}{x}.$$

(b) Wieder durch die Substitution $x = e^t, u(t) = y(e^t)$ ist die gegebene Differentialgleichung zu

$$\begin{aligned} \underbrace{u''(t) - u'(t)}_{x^2y''(x)} - 4\underbrace{u'(t)}_{xy'(x)} + 6u(t) = e^t, \\ u'' - 5u' + 6u = e^t \end{aligned}$$

äquivalent. Das ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung für u. Ihr charakteristisches Polynom ist

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6.$$

Die Nullstellen von p sind $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$ und folglich ist die Lösung der homogenen Gleichung durch

$$u_h(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{2t}$$

gegeben. Die rechte Seite der inhomogenen Gleichung ist e^t, d.h. $m = 0, \sigma = 1, \omega = 0$. Da $\sigma + i\omega = 1$ keine Nullstelle von p ist, machen wir den folgenden Ansatz für die spezielle Lösung u_p:

$$u_p(t) = ae^t, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Wir rechnen

$$u_p'(t) = u_p''(t) = ae^t$$

und setzen die in die entspechende inhomogene Differentialgleichung für u ein:

$$\begin{aligned} ae^t - 5ae^t + 6ae^t &= e^t, \\ 2ae^t = e^t \quad &\Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Folglich ist die allgemeine Lösung

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{2t} + \frac{1}{2} e^t,$$

also

$$y(x) = C_1 x^3 + C_2 x^2 + \frac{1}{2} x.$$

Aufgabe 3:

(a) Der Ansatz

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

führt auf

$$\begin{aligned} \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2}}_{=y''(x)} - x \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n}_{=y(x)} &= 2, \\ \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1) x^{n-2}}_{\overset{m=n-2}{=} \sum_{m=0}^{\infty} c_{m+2}(m+2)(m+1)x^m} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}}_{\overset{m=n+1}{=} \sum_{m=1}^{\infty} c_{m-1} x^m} &= 2, \\ 2c_2 x^0 + \sum_{m=1}^{\infty} \Big[(m+2)(m+1)c_{m+2} - c_{m-1}\Big] x^m &= 2. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir

$$2c_2 = 2$$

$$c_{m+2} = \frac{1}{(m+2)(m+1)} c_{m-1}, \quad m \geq 1, \quad \Longleftrightarrow \quad c_m = \frac{1}{m(m-1)} c_{m-3} \quad m \geq 3. \tag{1}$$

Es gilt

$$
\begin{aligned}
c_0 &= y(0) = 2, \qquad c_1 = y'(0) = 3, \qquad c_2 = 1\\
c_3 &= \frac{1}{3\cdot 2}c_0 = \frac{1}{\prod_{j=1}^{3/3} 3j(3j-1)}c_0,\\
c_4 &= \frac{1}{4\cdot 3}c_1 = \frac{1}{\prod_{j=1}^{(4-1)/3} (3j+1)3j}c_1,\\
c_5 &= \frac{1}{5\cdot 4}c_2 = \frac{1}{\prod_{j=1}^{(5-2)/3} (3j+2)(3j+1)}c_2,\\
c_6 &= \frac{1}{6\cdot 5}c_3 = \frac{1}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}c_0 = \frac{1}{\prod_{j=1}^{6/3} 3j(3j-1)}c_0,\\
c_7 &= \frac{1}{7\cdot 6}c_4 = \frac{1}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}c_1 = \frac{1}{\prod_{j=1}^{(7-1)/3} (3j+1)3j}c_1,\\
c_8 &= \frac{1}{8\cdot 7}c_5 = \frac{1}{8\cdot 7\cdot 5\cdot 4}c_2 = \frac{1}{\prod_{j=1}^{(8-2)/3} (3j+2)(3j+1)}c_2.
\end{aligned}
$$

Behauptung:

$$
c_n = \begin{cases} \frac{1}{\prod_{j=1}^{n/3} 3j(3j-1)}c_0 & \text{für } n = 3k,\\ \frac{1}{\prod_{j=1}^{(n-1)/3} (3j+1)3j}c_1 & \text{für } n = 3k+1,\\ \frac{1}{\prod_{j=1}^{(n-2)/3} (3j+2)(3j+1)}c_2 & \text{für } n = 3k+2. \end{cases} \iff \begin{aligned} c_{3k} &= \frac{1}{\prod_{j=1}^{k} 3j(3j-1)}c_0,\\ c_{3k+1} &= \frac{1}{\prod_{j=1}^{k} (3j+1)3j}c_1,\\ c_{3k+2} &= \frac{1}{\prod_{j=1}^{k} (3j+2)(3j+1)}c_2. \end{aligned}
$$

Induktionsschritt: $k \curvearrowright k+1$

$$
\begin{aligned}
c_{3(k+1)} &\overset{(2)}{=} \frac{1}{\big(3(k+1)\big)\big(3(k+1)-1\big)}c_{3(k+1)-3} = \frac{1}{\big(3(k+1)\big)\big(3(k+1)-1\big)}c_{3k}\\
&= \frac{1}{\big(3(k+1)\big)\big(3(k+1)-1\big)}\frac{1}{\prod_{j=1}^{k} 3j(3j-1)}c_0 = \frac{1}{\prod_{j=1}^{k+1} 3j(3j-1)}c_0,
\end{aligned}
$$

d.h. die Aussage stimmt für $c_{3k}, k \in \mathbb{N}$. Analogisch beweisen wir die Formeln für c_{3k+1} und $c_{3k+2}, k \in \mathbb{N}$.

(b) Wird in der Übung am 5.12.2014 besprochen.

Aufgabe 4:

(a) Das charakteristische Polynom dieser Gleichung ist

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

und es hat eine doppelte Nullstelle $\lambda_{1,2} = 1$. Folglich ist die Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung durch

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x$$

gegeben. Die rechte Seite der inhomogenen Gleichung ist $2e^x$, d.h. $m = 0, \sigma = 1, \omega = 0$. Da $\sigma + i\omega = 1$ eine doppelte Nullstelle (d.h. $s = 2$) von p ist, machen wir den folgenden Ansatz für die spezielle Lösung y_p:

$$y_p(x) = x^2 a e^x, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Wir rechnen

$$
\begin{aligned}
y_p'(x) &= a(2x + x^2)e^x,\\
y_p''(x) &= a(x^2 + 4x + 2)e^x
\end{aligned}
$$

und setzen die in die gegebene inhomogene Gleichung ein:

$$\begin{aligned} a(x^2+4x+2)e^x - 2a(2x+x^2)e^x + x^2ae^x &= 2e^x, \\ 2ae^x &= 2e^x \quad \Rightarrow a = 1. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ist somit

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1e^x + C_2xe^x + x^2e^x.$$

(b) Das charakteristische Polynom dieser Gleichung ist

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 9$$

und seine Nullstellen sind $\lambda_{1,2} = \pm 3i$. Folglich ist die Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung durch

$$y_h(x) = C_1 \sin(3x) + C_2 \cos(3x)$$

gegeben. Die rechte Seite der inhomogenen Gleichung ist $2x\sin x + xe^{3x} =: f_1(x) + f_2(x)$. Da für f_1 gilt es $m_1 = 1, \sigma_1 = 0, \omega_1 = 1$, d.h. $\sigma_1 + i\omega_1 = i$ keine Nullstelle von p ist, und für f_2 gilt es $m_2 = 1, \sigma_2 = 3, \omega_2 = 0$, d.h. $\sigma_2 + i\omega_2 = 3$ wieder keine Nullstelle von p ist, machen wir den folgenden Ansatz für die spezielle Lösung y_p:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \underbrace{y_{p_1}(x)}_{\text{entspricht } f_1(x)} + \underbrace{y_{p_2}(x)}_{\text{entspricht } f_2(x)} \\ &= \underbrace{(a_1x+a_0)\sin x + (b_1x+b_0)\cos x}_{=y_{p_1}(x)} + \underbrace{(d_1x+d_0)e^{3x}}_{=y_{p_2}(x)}, \quad a_{0,1}, b_{0,1}, d_{0,1} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Wir rechnen

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= (-b_1x + a_1 - b_0)\sin x + (a_1x + a_0 + b_1)\cos x + (3d_1x + 3d_0 + d_1)e^{3x}, \\ y_p''(x) &= (a_1x - a_0 - 2b_1)\sin x + (-b_1x - b_0 + 2a_1)\cos x + (9d_1x + 9d_0 + 6d_1)e^{3x} \end{aligned}$$

und setzen die in die gegebene inhomogene Gleichung ein:

$$\begin{aligned} &(a_1x - a_0 - 2b_1)\sin x + (-b_1x - b_0 + 2a_1)\cos x + (9d_1x + 9d_0 + 6d_1)e^{3x} \\ &\qquad + 9\Big[(a_1x + a_0)\sin x + (b_1x + b_0)\cos x + (d_1x + d_0)e^{3x}\Big] = 2x\sin x + xe^{3x} \\ &(8a_1x + 8a_0 - 2b_1)\sin x + (8b_1x + 8b_0 + 2a_1)\cos x + (18d_1x + 18d_0 + 6d_1)e^{3x} = 2x\sin x + xe^{3x} \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich führt auf

$$\begin{aligned} \sin x: &\quad 8a_1x + 8a_0 - 2b_1 = 2x \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x^1: & 8a_1 = 2, \\ x^0: & 8a_0 - 2b_1 = 0, \end{cases} \\ \cos x: &\quad 8b_1x + 8b_0 + 2a_1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x^1: & 8b_1 = 0, \\ x^0: & 8b_0 + 2a_1 = 0, \end{cases} \\ e^{3x}: &\quad 18d_1x + 18d_0 + 6d_1 = x \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x^1: & 18d_1 = 1, \\ x^0: & 18d_0 + 6d_1 = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

also $a_0 = b_1 = 0, a_1 = \frac{1}{4}, b_0 = -\frac{1}{16}, d_0 = -\frac{1}{54}, d_1 = \frac{1}{18}$. Die allgemeine Lösung ist somit

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1\sin(3x) + C_2\cos(3x) + \frac{1}{4}x\sin x - \frac{1}{16}\cos x + \frac{1}{54}(3x-1)e^{3x}.$$

Aufgabe 5:

(a) Durch die Substitution $x = e^t, u(t) = y(e^t)$ ist die gegebene Differentialgleichung zu

$$\underbrace{u''' - 3u'' + 2u'}_{=x^3 y(x)} - \underbrace{(u''(t) - u'(t))}_{x^2 y''(x)} + 2\underbrace{u'(t)}_{xy'(x)} - 2u(t) = 0,$$
$$u''' - 4u'' + 5u' - 2u = 0$$

äquivalent. Das ist eine homogene lineare Differentialgleichung für u. Ihr charakteristisches Polynom ist

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$$

Da p eine doppelte Nullstelle $\lambda_{1,2} = 1$ und eine einfache Nullstelle $\lambda_3 = 2$ hat, ist die allgemeine Lösung durch

$$u(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t + C_3 e^{2t}$$

gegeben und folglich ($t = \ln x$)

$$y(x) = C_1 x + C_2 \ln x \cdot x + C_3 x^2.$$

(b) Wieder durch die Substitution $x = e^t, u(t) = y(e^t)$ ist die gegebene Differentialgleichung äquivalent zu

$$\underbrace{u''(t) - u'(t)}_{x^2 y''(x)} - \underbrace{u'(t)}_{xy'(x)} + 2u(t) = e^t \cdot t,$$
$$u'' - 2u' + 2u = te^t$$

Das ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung für u. Ihr charakteristisches Polynom ist

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2.$$

Die Nullstellen von p sind $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$ und folglich ist die Lösung der entsprechenden homogenen Gleichung durch

$$u_h(t) = C_1 e^t \sin t + C_2 e^t \cos t$$

gegeben. Die rechte Seite der inhomogenen Gleichung ist te^t, d.h. $m = 1, \sigma = 1, \omega = 0$. Da $\sigma + i\omega = 1$ keine Nullstelle von p ist, machen wir den folgenden Ansatz für die spezielle Lösung u_p

$$u_p(t) = (at + b)e^t, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Wir rechnen

$$u_p'(t) = (at + a + b)e^t,$$
$$u_p''(t) = (at + 2a + b)e^t$$

und setzen die in die entspechende inhomogene Differentialgleichung für u ein

$$(at + 2a + b)e^t - 2(at + a + b)e^t + 2(at + b)e^t = te^t,$$
$$(at + b)e^t = te^t \quad \Rightarrow \quad a = 1, b = 0.$$

Folglich ist die allgemeine Lösung

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) = C_1 e^t \sin t + C_2 e^t \cos t + te^t,$$

also

$$y(x) = C_1 x \sin(\ln x) + C_2 x \cos(\ln x) + \ln x \cdot x.$$

Aufgabe 6:

(a) Der Ansatz

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

führt auf

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2}}_{=y''(x)} + x\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}}_{=y'(x)} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = x,$$

$$\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2}}_{\overset{m=n-2}{=} \sum_{m=0}^{\infty} c_{m+2}(m+2)(m+1)x^m} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = x,$$

$$(2c_2 + c_0)x^0 + (6c_3 + 2c_1)x + \sum_{m=2}^{\infty} \Big[(m+2)(m+1)c_{m+2} + c_m m + c_m\Big]x^m = x.$$

Durch Koeffizientenvergleich führt auf

$$\begin{aligned}
x^0 :&\quad 2c_2 + c_0 = 0 \quad \Rightarrow c_2 = -\frac{c_0}{2},\\
x^1 :&\quad 6c_3 + 2c_1 = 1 \quad \Rightarrow c_3 = \frac{1-2c_1}{6},\\
x^m :&\quad c_{m+2} = -\frac{1}{m+2}c_m, \quad m \geq 2, \qquad \iff \qquad c_m = -\frac{1}{m}c_{m-2} \quad m \geq 4.
\end{aligned} \tag{2}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
c_0 &= y(0) = 1, \qquad c_1 = y'(0) = \frac{1}{2}, \qquad c_2 = -\frac{c_0}{2} = -\frac{1}{2}\\
c_3 &= \frac{1 - 2\cdot\frac{1}{2}}{6} = 0 \quad \Rightarrow c_n = 0 \quad \forall n = 2k+1, k \geq 1,\\
c_4 &= -\frac{1}{4}c_2 = -\frac{1}{4}\Big(-\frac{1}{2}\Big) = \frac{(-1)^2}{4\cdot 2},\\
c_6 &= -\frac{1}{6}c_4 = -\frac{1}{6}\frac{(-1)^2}{4\cdot 2} = \frac{(-1)^3}{6\cdot 4\cdot 2},\\
c_8 &= -\frac{1}{8}c_6 = -\frac{1}{8}\frac{(-1)^3}{6\cdot 4\cdot 2} = \frac{(-1)^4}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}
\end{aligned}$$

Behauptung:

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k}{\prod_{j=0}^{k-1}(2k-2j)}.$$

Induktionsschritt: $k \curvearrowright k+1$

$$\begin{aligned}
c_{2(k+1)} &\overset{(2)}{=} -\frac{1}{2(k+1)}c_{2k} = \frac{-1}{2(k+1)} \cdot \frac{(-1)^k}{\prod_{j=0}^{k-1}(2k-2j)}\\
&= \frac{1}{2(k+1)} \cdot \frac{(-1)^k}{2k\cdot(2k-2)\cdots(2k-2(k-1))}\\
&= \frac{(-1)^{k+1}}{2(k+1)\cdot\big(2(k+1)-2\big)\cdot\big(2(k+1)-4\big)\cdots\big(2(k+1)-2k\big)}\\
&= \frac{(-1)^{k+1}}{\prod_{j=0}^{k}(2(k+1)-2j)},
\end{aligned}$$

d.h. die Aussage stimmt. Somit ist die Lösung der gegebenen Differentialgleichung

$$y(x) = \underbrace{1}_{=c_0 x^0} + \underbrace{\frac{1}{2}x}_{=c_1 x} \underbrace{-\frac{1}{2}x^2}_{=c_2 x^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{\prod_{j=0}^{k-1}(k-2j)} x^{2n} = 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{\prod_{j=0}^{k-1}(k-2j)} x^{2n}.$$