Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2014/15
12.12.2014

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 5. Übungsblatt

Aufgabe 1:

(a) Der Ansatz

$$y(x) = x^\rho \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\rho}$$

führt auf

$$x^2 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+\rho)(n+\rho-1)x^{n+\rho-2}}_{=y''(x)} + \frac{1}{2} x \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+\rho) x^{n+\rho-1}}_{=y'(x)} + \frac{1}{4} x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\rho} = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+\rho)(n+\rho-1)x^{n+\rho} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} c_n (n+\rho) x^{n+\rho} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4} c_n x^{n+\rho+1}}_{\overset{m=n+1}{=} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4} c_{m-1} x^{m+\rho}} = 0,$$

$$x^\rho \Big[c_0 \rho(\rho - \frac{1}{2}) + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(c_n (n+\rho)(n+\rho-\frac{1}{2}) + \frac{1}{4} c_{n-1} \Big) x^n \Big] = 0.$$

Koeffizientenvergleich liefert die determinierende Gleichung

$$\rho(\rho - \frac{1}{2}) = 0 \quad \text{mit Nullstellen} \quad \rho_1 = \frac{1}{2}, \rho_2 = 0$$

und

$$c_0 : \text{beliebig} \quad \text{und} \quad c_n = -\frac{\frac{1}{4}}{(n+\rho)(n+\rho-\frac{1}{2})} c_{n-1}, \quad n \geq 1. \tag{1}$$

1) Für $\rho_1 = \frac{1}{2}$ erhalten wir

$$c_n = \frac{-\frac{1}{4}}{n(n+\frac{1}{2})} c_{n-1} = -\frac{1}{2n(2n+1)} c_{n-1}, \quad n \geq 1. \tag{2}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
c_1 &= -\frac{1}{2\cdot 3} c_0 = \frac{(-1)^1}{(2.1+1)!} c_0, \\
c_2 &= -\frac{1}{4\cdot 5} c_1 = \frac{-1}{5\cdot 4} \frac{(-1)^1}{3!} c_0 = \frac{(-1)^2}{(2.2+1)!} c_0, \\
c_3 &= -\frac{1}{6\cdot 7} c_2 = -\frac{-1}{7\cdot 6} \frac{(-1)^2}{5!} c_0 = \frac{(-1)^3}{(2.3+1)!} c_0.
\end{aligned}$$

Vermutung:

$$c_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} c_0.$$

Induktionsschritt: $n \curvearrowright n+1$:

$$\begin{aligned} c_{n+1} &\overset{(2)}{=} -\frac{1}{2(n+1)\big(2(n+1)+1\big)} c_n \\ &= \frac{-1}{\big(2(n+1)+1\big)\big(2(n+1)\big)} \cdot \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} c_0 = \frac{(-1)^{n+1}}{\big(2(n+1)+1\big)!} c_0. \end{aligned}$$

Folglich ist mit $c_0 = 1$

$$y_1(x) = x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{n+\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{\frac{2n+1}{2}} = \sin(\sqrt{x}).$$

2) Für $\rho_2 = 0$ erhalten wir aus Gleichung (1)

$$d_n = \frac{-\frac{1}{4}}{n(n-\frac{1}{2})} d_{n-1} = -\frac{1}{2n(2n-1)} d_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} d_1 &= -\frac{1}{2 \cdot 1} d_0 = \frac{(-1)^1}{(2.1)!} d_0, \\ d_2 &= -\frac{1}{4 \cdot 3} d_1 = \frac{-1}{4 \cdot 3} \frac{(-1)^1}{2!} d_0 = \frac{(-1)^2}{(2.2)!} d_0, \\ d_3 &= -\frac{1}{6 \cdot 5} d_2 = -\frac{-1}{6 \cdot 5} \frac{(-1)^2}{4!} c_0 = \frac{(-1)^3}{(2.3)!} d_0. \end{aligned}$$

Wieder mit Hilfe der vollständigen Induktion können wir zeigen, dass

$$d_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!} d_0$$

und folglich mit $d_0 = 1$

$$y_2(x) = x^0 \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{\frac{2n}{2}} = \cos(\sqrt{x}).$$

(b) Der Ansatz

$$y(x) = x^\rho \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\rho}$$

führt auf

$$\begin{aligned} x^2 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+\rho)(n+\rho-1) x^{n+\rho-2}}_{=y''(x)} + (x-2x^2) \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+\rho) x^{n+\rho-1}}_{=y'(x)} \\ + (x^2 - x) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\rho} = 0, \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+\rho)(n+\rho-1)x^{n+\rho} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+\rho)x^{n+\rho} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} 2c_n(n+\rho)x^{n+\rho+1}}_{\overset{m=n+1}{=}\sum_{m=1}^{\infty} 2c_{m-1}(m+\rho-1)x^{m+\rho}}$$

$$+ \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\rho+2}}_{\overset{m=n+2}{=}\sum_{m=2}^{\infty} c_{m-2}x^{m+\rho}} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\rho+1}}_{\overset{m=n+1}{=}\sum_{m=1}^{\infty} c_{m-1}x^{m+\rho}} = 0,$$

$$x^\rho \Big[c_0\rho(\rho-1) + c_1(\rho+1)\rho x + c_0\rho + c_1(\rho+1)x - 2c_0\rho x - c_0 x$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \Big(c_n[(n+\rho)(n+\rho-1) + n + \rho] - c_{n-1}\big(2(n+\rho-1)+1\big) + c_{n-2}\Big) x^n \Big] = 0.$$

Koeffizientenvergleich liefert die determinierende Gleichung

$$\rho(\rho-1) + \rho = 0 \quad \text{mit Nullstellen} \quad \rho_1 = \rho_2 = 0$$

und

$$c_0 : \text{beliebig}, \quad \underbrace{c_1(\rho+1)^2 - c_0(2\rho+1)}_{\text{Koeffizient vor } x^1} = 0 \quad \text{und} \quad c_n = \frac{(2n-2\rho-1)c_{n-1} - c_{n-2}}{(n+\rho)^2}, \quad n \geq 2.$$

Für $\rho_1 = 0$ erhalten wir

$$c_1 - c_0 = 0$$
$$c_n = \frac{(2n-1)c_{n-1} - c_{n-2}}{n^2}, \quad n \geq 1.$$

Es gilt

$$c_1 = c_0 = \frac{1}{1!}c_0,$$
$$c_2 = \frac{3c_1 - c_0}{4} = \frac{2c_0}{4} = \frac{1}{2!}c_0,$$
$$c_3 = \frac{5c_2 - c_1}{9} = \frac{1}{6}c_0 = \frac{1}{3!}c_0,$$

Wieder mit Hilfe der vollständigen Induktion können wir zeigen, dass

$$c_n = \frac{1}{n!}c_0$$

und folglich mit $c_0 = 1$

$$y_1(x) = x^0 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} c_0 x^n = e^x.$$

Für y_2 machen wir den Ansatz

$$y_2(x) = \ln x \cdot y_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n x^n, \quad (d_0 = 0).$$

Es gilt

$$x^2 \underbrace{\Big(\frac{-1}{x^2} y_1(x) + \frac{2}{x} y_1'(x) + \ln x \cdot y_1''(x) + \sum_{n=2}^{\infty} d_n n(n-1) x^{n-2} \Big)}_{=y_2''(x)}$$

$$+(x-2x^2) \underbrace{\Big(\frac{1}{x} y_1(x) + \ln x \cdot y_1'(x) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n n x^{n-1} \Big)}_{=y_1'(x)} + (x^2 - x)\Big(\ln x \cdot y_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n x^n \Big) = 0,$$

$$\underbrace{\ln x\Big(x^2y_1''(x)+(x-2x^2)y_1'(x)+(x^2-x)y_1(x)\Big)}_{=0,\text{da } y_1 \text{ Lösung der gegebenen DGL}}-y_1(x)+2x\underbrace{y_1'(x)}_{=e^x}$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}d_nn(n-1)x^n+y_1(x)-2x\underbrace{y_1(x)}_{=e^x}+\sum_{n=1}^{\infty}d_nnx^n$$

$$-\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}2d_nnx^{n+1}}_{\stackrel{m=n+1}{=}\sum_{m=2}^{\infty}2d_{m-1}(m-1)x^m}+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}d_nx^{n+2}}_{\stackrel{m=n+2}{=}\sum_{m=3}^{\infty}d_{m-2}x^m}-\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}d_nx^{n+1}}_{\stackrel{m=n+1}{=}\sum_{m=2}^{\infty}d_{m-1}x^m}=0,$$

$$d_1x+(4d_2-3d_1)x^2+\sum_{n=3}^{\infty}\Big[d_nn^2-d_{n-1}(2n-1)+d_{n-2}\Big]x^n=0.$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$\begin{aligned}
x^1 &: d_1=0,\\
x^2 &: d_2=\frac{3}{4}d_1=0,\\
x^n &: d_n=\frac{(2n-1)d_{n-1}-d_{n-2}}{n^2}=c_n,\quad n\geq 3\quad\Rightarrow\quad d_n=\frac{1}{n!}d_0=0,\quad n\geq 3.
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$y_2(x)=\ln x\cdot y_1(x)=\ln x\cdot e^x.$$

Aufgabe 2: Das gegebene Anfangswertsproblem ist äquivalent zu

$$\vec{y}(x)=F(x,\vec{y}(x))\quad\text{mit}\quad\vec{y}_0=\vec{y}(0)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$

wobei

$$\vec{y}(x)=\begin{pmatrix}u(x)\\v(x)\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad F(x,\vec{y}(x))=\begin{pmatrix}u(x)\\u(x)+v(x)\end{pmatrix}.$$

Die Picardschen Iteration ist durch

$$\vec{y}_{k+1}(x)=\vec{y}_0+\int_0^x F(t,\vec{y}_k(t))\mathrm{d}t=\begin{pmatrix}u(0)\\v(0)\end{pmatrix}+\int_0^x\begin{pmatrix}u_k(t)\\u_k(t)+v_k(t)\end{pmatrix}\mathrm{d}t$$

gegeben. Es gilt

$$\begin{aligned}
\vec{y}_1(x)=\begin{pmatrix}u_1(x)\\v_1(x)\end{pmatrix}&=\vec{y}_0+\int_0^x\begin{pmatrix}u_0(t)\\u_0(t)+v_0(t)\end{pmatrix}\mathrm{d}t=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\int_0^x\begin{pmatrix}1\\1+1\end{pmatrix}\mathrm{d}t\\
&=\begin{pmatrix}1+x\\1+2x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{n=0}^{1}\frac{1}{n!}x^n\\ \sum_{n=0}^{1}\frac{1}{n!}x^n+x\cdot\Big(\sum_{n=0}^{0}\frac{1}{n!}x^n\Big)\end{pmatrix},\\
\vec{y}_2(x)=\begin{pmatrix}u_2(x)\\v_2(x)\end{pmatrix}&=\vec{y}_0+\int_0^x\begin{pmatrix}u_1(t)\\u_1(t)+v_1(t)\end{pmatrix}\mathrm{d}t=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\int_0^x\begin{pmatrix}1+t\\2+3t\end{pmatrix}\mathrm{d}t\\
&=\begin{pmatrix}1+x+\frac{1}{2}x^2\\1+2x+\frac{3}{2}x^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{n=0}^{2}\frac{1}{n!}x^n\\ \sum_{n=0}^{2}\frac{1}{n!}x^n+x\cdot\Big(\sum_{n=0}^{1}\frac{1}{n!}x^n\Big)\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\vec{y}_3(x) = \begin{pmatrix} u_3(x) \\ v_3(x) \end{pmatrix} = \vec{y}_0 + \int\limits_0^x \begin{pmatrix} u_2(t) \\ u_2(t) + v_2(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int\limits_0^x \begin{pmatrix} 1 + t + \frac{1}{2}t^2 \\ 2 + 3t + 2t^2 \end{pmatrix} \mathrm{d}t$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \\ 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^3 \frac{1}{n!}x^n \\ \sum_{n=0}^3 \frac{1}{n!}x^n + x \cdot \left(\sum_{n=0}^2 \frac{1}{n!}x^n\right) \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der vollständigen Induktion können wir zeigen, dass

$$\vec{y}_k(x) = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!}x^n \\ \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!}x^n + x \cdot \left(\sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{n!}x^n\right) \end{pmatrix}.$$

Der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} \vec{y}_k(x)$ existiert für jedes x und ist gleich

$$\lim_{k\to\infty} \vec{y}_k(x) = \lim_{k\to\infty} \begin{pmatrix} u_k(x) \\ v_k(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}x^n \\ \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}x^n + x \cdot \left(\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}x^n\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x + x \cdot e^x \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3:

(a) Die gegebene DGL ist äquivalent zu

$$x^2y'' - 2x^2y' + \Big(\frac{1}{4} + x^2\Big)y = 0.$$

Der Ansatz

$$y(x) = x^\rho \sum_{n=0}^\infty c_n x^n = \sum_{n=0}^\infty c_n x^{n+\rho}$$

führt auf

$$x^2 \underbrace{\sum_{n=0}^\infty c_n(n+\rho)(n+\rho-1)x^{n+\rho-2}}_{=y''(x)} - 2x^2 \underbrace{\sum_{n=0}^\infty c_n(n+\rho)x^{n+\rho-1}}_{=y'(x)} + \Big(\frac{1}{4} + x^2\Big) \sum_{n=0}^\infty c_n x^{n+\rho} = 0,$$

$$\sum_{n=0}^\infty c_n(n+\rho)(n+\rho-1)x^{n+\rho} - \underbrace{\sum_{n=0}^\infty 2c_n(n+\rho)x^{n+\rho+1}}_{\overset{m=n+1}{=} \sum_{m=1}^\infty 2c_{m-1}(m+\rho-1)x^{m+\rho}} + \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{4}c_n x^{n+\rho} + \underbrace{\sum_{n=0}^\infty c_n x^{n+\rho+2}}_{\overset{m=n+2}{=} \sum_{m=2}^\infty c_{m-2}x^{m+\rho}} = 0,$$

$$x^\rho \Big[c_0\big(\rho(\rho-1) + \frac{1}{4}\big) + \big(c_1(\rho+1)\rho - 2c_0\rho + \frac{1}{4}c_1\big)x + \sum_{n=2}^\infty \Big(c_n[(n+\rho)(n+\rho-1) + \frac{1}{4}] - 2(n+\rho-1)c_{n-1} + c_{n-2}\Big)x^n\Big] = 0.$$

Koeffizientenvergleich liefert die determinierende Gleichung

$$\rho^2 - \rho + \frac{1}{4} = 0 \quad \text{mit Nullstellen} \quad \rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{2}$$

und

$$c_0 : \text{beliebig}, \quad \underbrace{c_1(\rho^2 + \rho + \frac{1}{4}) - 2c_0\rho = 0}_{\text{Koeffizient vor } x^1} \quad \text{und} \quad c_n = \frac{2(n+\rho-1)c_{n-1} - c_{n-2}}{(n+\rho)(n+\rho-1) + \frac{1}{4}}, \quad n \geq 2.$$

Für $\rho_1 = \frac{1}{2}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} c_0 = c_0, \\ c_n &= \frac{(2n-1)c_{n-1} - c_{n-2}}{n^2}, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Als bei Aufgabe 1 (b) können wir zeigen, dass

$$c_n = \frac{1}{n!} c_0$$

und folglich mit $c_0 = 1$

$$y_1(x) = x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \sqrt{x} e^x.$$

Für y_2 machen wir den Ansatz

$$y_2(x) = \ln x \cdot y_1(x) + x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} d_n x^n, \quad (d_0 = 0).$$

Es gilt

$$x^2 \underbrace{\Big(\frac{-1}{x^2} y_1(x) + \frac{2}{x} y_1'(x) + \ln x \cdot y_1''(x) + x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=2}^{\infty} d_n n(n-1) x^{n-2} \Big)}_{=y_2''(x)}$$
$$+2x^2 \underbrace{\Big(\frac{1}{x} y_1(x) + \ln x \cdot y_1'(x) + x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} d_n n x^{n-1} \Big)}_{=y_1'(x)} + (\frac{1}{4} + x^2) \Big(\ln x \cdot y_1(x) + x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} d_n x^n \Big) = 0,$$

$$x^{\frac{1}{2}} \Big[d_1 x + (4d_2 - 3d_1) x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \Big[d_n n^2 - d_{n-1}(2n-1) + d_{n-2} \Big] x^n \Big] = 0.$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$\begin{aligned} x^1 &: d_1 = 0, \\ x^2 &: d_2 = \frac{3}{4} d_1 = 0, \\ x^n &: d_n = \frac{(2n-1)d_{n-1} - d_{n-2}}{n^2} = c_n, \quad n \geq 3 \quad \Rightarrow \quad d_n = \frac{1}{n!} d_0 = 0, \quad n \geq 3. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$y_2(x) = \ln x \cdot y_1(x) = \ln x \cdot \sqrt{x} e^x.$$

(b) Die gegebene DGL ist äquivalent zu

$$x^2 y'' + (x^2 - x) y' - xy = 0.$$

Der Ansatz

$$y(x) = x^{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\rho}$$

führt auf

$$x^2 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+\rho)(n+\rho-1)x^{n+\rho-2}}_{=y''(x)} + (x^2-x) \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+\rho)x^{n+\rho-1}}_{=y'(x)} - x\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\rho} = 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+\rho)(n+\rho-1)x^{n+\rho} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+\rho)x^{n+\rho+1}}_{\overset{m=n+1}{=}\sum_{m=1}^{\infty} c_{m-1}(m+\rho-1)x^{m+\rho}} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+\rho)x^{n+\rho} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\rho+1}}_{\overset{m=n+1}{=}\sum_{m=1}^{\infty} c_{m-1}x^{m+\rho}} = 0,$$

$$x^{\rho}\Big[c_0(\rho^2-2\rho) + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(c_n(n+\rho)(n+\rho-2) + c_{n-1}(n+\rho-2)\Big)x^n\Big] = 0. \tag{3}$$

Koeffizientenvergleich liefert die determinierende Gleichung

$$\rho^2 - 2\rho = 0 \quad \text{mit Nullstellen} \quad \rho_1 = 2, \rho_2 = 0$$

und

$$c_0 : \text{beliebig} \quad \text{und} \quad c_n = -\frac{1}{n+\rho}c_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Für $\rho_1 = 2$ erhalten wir

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{1}{3}c_0, \\ c_2 &= -\frac{1}{4}c_1 = \frac{(-1)^2}{4\cdot 3} = 2\frac{(-1)^2}{4!}c_0, \\ c_3 &= -\frac{1}{5}c_2 = -\frac{1}{5}\cdot\frac{2(-1)^2}{4!}c_0 = 2\frac{(-1)^3}{5!}c_0. \end{aligned}$$

Wieder mit Hilfe der vollständigen Induktion können wir zeigen, dass

$$c_n = 2\frac{(-1)^n}{(n+2)!}c_0, \quad n \geq 0$$

und folglich mit $c_0 = 1$

$$y_1(x) = x^2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+2)!}x^{n+2} = 2(e^{-x} - 1 + x).$$

Für y_2 machen wir den Ansatz

$$y_2(x) = A\ln x \cdot y_1(x) + x^0\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n, \quad A \in \{0,1\}.$$

Zuerst versuchen wir mit $A = 0$ y_2 zu bestimmen. Aus (3) folgt es

$$d_0 : \text{beliebig} \quad \text{und} \quad d_n[n(n-1) - n] + d_{n-1}(n-2) = 0 \quad \text{für } n \geq 1,$$

d.h.

$$d_0 : \text{beliebig} \quad \text{und} \quad d_n = -\frac{1}{n} d_{n-1}.$$

Wieder mit Hilfe der vollständigen Induktion können wir zeigen, dass

$$d_n = \frac{(-1)^n}{n!} d_0$$

und folglich mit $d_0 = 1$

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = e^{-x}.$$

Aufgabe 4: Das gegebene Anfangswertsproblem ist äquivalent zu

$$\vec{y}(x) = F(x, \vec{y}(x)) \quad \text{mit} \quad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F(x, \vec{y}(x)) = \begin{pmatrix} v(x) \\ -u(x) \end{pmatrix}.$$

Die Picardschen Iteration ist durch

$$\vec{y}_{k+1}(x) = \vec{y}_0 + \int_0^x F(t, \vec{y}_k(t)) \mathrm{d}t = \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} v_k(t) \\ -u_k(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t$$

gegeben. Es gilt

$$\begin{aligned}
\vec{y}_1(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ v_1(x) \end{pmatrix} &= \vec{y}_0 + \int_0^x \begin{pmatrix} v_0(t) \\ -u_0(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ \sum_{n=0}^{0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \end{pmatrix}, \\
\vec{y}_2(x) = \begin{pmatrix} u_2(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix} &= \vec{y}_0 + \int_0^x \begin{pmatrix} v_1(t) \\ -u_1(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \begin{pmatrix} x \\ 1 - \frac{1}{2}x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ \sum_{n=0}^{1} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{y}_3(x) = \begin{pmatrix} u_3(x) \\ v_3(x) \end{pmatrix} &= \vec{y}_0 + \int_0^x \begin{pmatrix} v_2(t) \\ -u_2(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}t^2 \\ -t \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \begin{pmatrix} x - \frac{1}{6}x^3 \\ 1 - \frac{1}{2}x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ \sum_{n=0}^{1} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \end{pmatrix}. \\
\vec{y}_4(x) = \begin{pmatrix} u_4(x) \\ v_4(x) \end{pmatrix} &= \vec{y}_0 + \int_0^x \begin{pmatrix} v_3(t) \\ -u_3(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^x \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}t^2 \\ -t + \frac{1}{6}t^3 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \begin{pmatrix} x - \frac{1}{6}x^3 \\ 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ \sum_{n=0}^{2} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der vollständigen Induktion können wir zeigen, dass

$$\vec{y}_{2k+1}(x) = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \end{pmatrix}, \quad k \geq 0,$$

$$\vec{y}_{2k+2}(x) = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ \sum_{n=0}^{k+1} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \end{pmatrix}, \quad k \geq 0.$$

Der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} \vec{y}_k(x)$ existiert für jedes x und ist gleich

$$\lim_{k\to\infty} \vec{y}_k(x) = \lim_{k\to\infty} \begin{pmatrix} u_k(x) \\ v_k(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}.$$