Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2014/15
12.01.2015

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 1:

(a) Das gegebene Differentialgleichungssystem ist äuivalent zu

$$\vec{y}'(t) = A\vec{y}(t), \tag{1}$$

wobei

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$det(A - \lambda I) = (2-\lambda)^3 + 1 - 1 - (2-\lambda)(1-1+1) = (2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-3),$$

d.h. die Eigenwerte von A sind $2, 1$ und 3.
Zur Berechnung des Kerns von

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

verwenden wir die folgenden Zeilenumformungen

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - Z_2]{Z_2 \to Z_1; Z_3 \to Z_3 - Z_1;} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und lesen mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks ab

$$E_A(2) = \text{lin}\{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\},$$

d.h. ein Eigenvektor zum Eigenwert 2 ist gegeben durch $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Nun zur Berechnung des Eigenvektors zum Eigenwert 1. .

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to \frac{Z_2}{2}; Z_1 \to Z_1 + Z_2]{Z_2 \to Z_2 - Z_1; Z_3 \to Z_3 - Z_1;} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir bekommen mit Hilfe des (-1)-Ergäanzungstricks, dass

$$E_A(1) = \text{lin}\{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\},$$

d.h. ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist gegeben durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ähnlich bekommen wir, dass

$$E_A(3) = \text{lin}\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\},$$

d.h. ein Eigenvektor zum Eigenwert 3 ist gegeben durch $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ein Fundamentalsystem von (1) ist also gegeben durch

$$\vec{\phi}_1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\phi}_2(t) = e^{t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\phi}_3(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und folglich

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = C_1\vec{\phi}_1(t) + C_2\vec{\phi}_2(t) + C_3\vec{\phi}_3(t).$$

(b) Das gegebene Differentialgleichungssystem ist äuivalent zu

$$\vec{y}'(t) = A\vec{y}(t) \quad \text{mit} \quad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

wobei

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$det(A - \lambda I) = (7-\lambda)(3-\lambda) + 4 = (\lambda - 5)^2,$$

d.h. A hat einen doppelten Eigenwert $\lambda = 5$.
Ein Eigenvektor ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ mit

$$(A - 5I)\vec{v} = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad 2v_1 + v_2 = 0,$$

d.h. v ist z. B. $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Ein zweiter Eigenvektor zum Eigenwert 5 ist $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ mit

$$(A - 5I)\vec{w} = \vec{v} \quad \Longleftrightarrow \quad 2w_1 + w_2 = 1,$$

d.h. w ist z. B. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Ein Fundamentalsystem von (2) ist also gegeben durch

$$\vec{\phi}_1(t) = e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{\phi}_2(t) = e^{5t}(t\vec{v} + \vec{w}) = e^{5t}\Big[t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\Big]$$

und folglich

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = C_1\vec{\phi}_1(t) + C_2\vec{\phi}_2(t) = \left[C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2\left(t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right] e^{5t}.$$

Mit Hilfe des Anfangwertes bestimmen wir die Konstanten C_1 und C_2:

$$\vec{y}(0) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad C_1 = 2, C_2 = -1.$$

Die Lösung ist somit

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} 2-t \\ -5+2t \end{pmatrix} e^{5t}.$$

Aufgabe 2:

(a) Es gilt

$$det(A - \lambda I) = (4-\lambda)(3-\lambda) - 6 = (\lambda - 6)(\lambda - 1).$$

Ein Eigenvektor zum Eigenwert 6 ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ mit

$$(A - 6I)\vec{v} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -2v_1 + 2v_2 = 0,$$

d.h. v ist z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ mit

$$(A - I)\vec{v} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 3w_1 + 2w_2 = 0,$$

d.h. w ist z.B. $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Es gilt

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}}_{=:S} \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:D} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}}_{=S^{-1}}$$

und folglich

$$e^{tA} = Se^{tD}S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{6t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}e^{6t} + \frac{2}{5}e^t & \frac{2}{5}e^{6t} - \frac{2}{5}e^t \\ \frac{3}{5}e^{6t} - \frac{3}{5}e^t & \frac{2}{5}e^{6t} + \frac{3}{5}e^t \end{pmatrix}.$$

(b) Es gilt

$$det(A - \lambda I) = (5-\lambda)(-3-\lambda) + 16 = (\lambda - 1)^2,$$

d.h. A hat einen doppelten Eigenwert $\lambda = 1$.

Ein Eigenvektor ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ mit

$$(A - I)\vec{v} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 4v_1 - 8v_2 = 0,$$

d.h. v ist z.B. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ein zweiter Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ mit

$$(A - I)\vec{w} = \vec{v} \quad \Longleftrightarrow \quad 4w_1 - 8w_2 = 2,$$

d.h. w ist z.B. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$. Es gilt

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:S} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:D} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}}_{=S^{-1}}$$

und folglich

$$e^{tA} = Se^{tD}S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4te^t + e^t & -8te^t \\ 2te^t & e^t - 4e^t \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3: Von Aufgabe 2 (a) haben wir

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5}e^{6t} + \frac{2}{5}e^t & \frac{2}{5}e^{6t} - \frac{2}{5}e^t \\ \frac{3}{5}e^{6t} - \frac{3}{5}e^t & \frac{2}{5}e^{6t} + \frac{2}{5}e^t \end{pmatrix}.$$

Mit Variation der Konstanten erhält man

$$\begin{aligned}
\vec{y}(t) &= e^{tA}\vec{y}(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}b(s)ds \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2}{5}e^t + \frac{3}{5}e^{6t} \\ -\frac{3}{5}e^t + \frac{3}{5}e^{6t} \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{2}{5}e^{t-s} + \frac{3}{5}e^{6(t-s)} & -\frac{2}{5}e^{t-s} + \frac{2}{5}e^{6(t-s)} \\ -\frac{3}{5}e^{t-s} + \frac{3}{5}e^{6(t-s)} & \frac{3}{5}e^{t-s} + \frac{2}{5}e^{6(t-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^s \\ e^{2s} \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2}{5}e^t + \frac{3}{5}e^{6t} \\ -\frac{3}{5}e^t + \frac{3}{5}e^{6t} \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} -\frac{2}{5}e^{s+t} + \frac{3}{5}e^{6t-5s} + \frac{2}{5}e^{6t-4s} + \frac{2}{5}e^t \\ \frac{3}{5}e^{s+t} + \frac{3}{5}e^{6t-5s} + \frac{2}{5}e^{6t-4s} - \frac{3}{5}e^t \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2}{5}e^t + \frac{3}{5}e^{6t} \\ -\frac{3}{5}e^t + \frac{3}{5}e^{6t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{5}te^t + \frac{7}{25}e^t - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{11}{50}e^{6t} \\ -\frac{3}{5}te^t - \frac{18}{25}e^t + \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{11}{50}e^{6t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2}{5}te^t + \frac{17}{25}e^t - \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{41}{50}e^{6t} \\ -\frac{3}{5}te^t - \frac{33}{25}e^t + \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{41}{50}e^{6t} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4:

(a) Das gegebene Differentialgleichungssystem ist äuivalent zu

$$\vec{y}'(t) = A\vec{y}(t), \tag{3}$$

wobei

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$det(A - \lambda I) = (-1-\lambda)^3 + 1 + 1 - (-1-\lambda)(1+1+1) = (1-\lambda)(\lambda+2)^2,$$

d.h. die Eigenwerte von A sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_{2,3} = -2$.
Zur Berechnung des Kerns von

$$A - I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

verwenden wir die folgenden Zeilenumformungen

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to Z_2/(-3); Z_3 \to Z_3 - Z_2, Z_1 = Z_1 + 2Z_2]{Z_1 \to Z_2; Z_2 \to Z_2 + 2Z_1; Z_3 \to Z_3 - Z_1;} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und lesen mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks ab

$$E_A(2) = \text{lin}\{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\},$$

d.h. ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist gegeben durch $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Nun zur Berechnung der Eigenvektoren zum Eigenwert -2. .

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - Z_1]{Z_2 \to Z_2 - Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir bekommen mit Hilfe des (-1)-Ergäanzungstricks, dass

$$E_A(2) = \text{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\},$$

d.h. die Eigenvektoren zum Eigenwert -2 sind gegeben durch $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ein Fundamentalsystem von (3) ist also gegeben durch

$$\vec{\phi}_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\phi}_2(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\phi}_3(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und folglich

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = C_1\vec{\phi}_1(t) + C_2\vec{\phi}_2(t) + C_3\vec{\phi}_3(t).$$

(b) Das gegebene Differentialgleichungssystem ist äuivalent zu

$$\vec{X}'(t) = A\vec{X}(t), \tag{4}$$

wobei

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$det(A - \lambda I) = (4 - \lambda)(2 - \lambda) + 5 = \lambda^2 - 6\lambda + 13.$$

Die Eigenwerte von A sind somit $\lambda_{1,2} = 3 \pm 2i$.

Ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 3 + 2i$ ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ mit

$$(A - (3 + 2i)I)\vec{v} = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad (1 - 2i)v_1 - v_2 = 0,$$

d.h. v ist z. B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix}$. Ähnlich erhalten wir, dass ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 3-2i$ ist $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix}$.
Es gilt

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} e^{(3+2i)t} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} e^{3t}(\cos(2t) + i\sin(2t)) \\ &= e^{3t}\Big[\begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \cos(2t)+2\sin(2t) \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \sin(2t)-2\cos(2t) \end{pmatrix}\Big].\end{aligned}$$

Ein reelles Fundamentalsystem zum (4) ist dann gegeben durch

$$\vec{\phi}_1(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \cos(2t)+2\sin(2t) \end{pmatrix}, \quad \vec{\phi}_2(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} \sin(2t) \\ \sin(2t)-2\cos(2t) \end{pmatrix}$$

und folglich

$$\begin{aligned}\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} &= C_1\vec{\phi}_1(t) + C_2\vec{\phi}_2(t) \\ &= \begin{pmatrix} e^{3t}\big(C_1\cos(2t) + C_2\sin(2t)\big) \\ e^{3t}\big(C_1(\cos(2t)+2\sin(2t)) + C_2(\sin(2t)-2\cos(2t))\big) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Aufgabe 5: Es gilt

$$\begin{aligned}det(A-\lambda I) &= (5-\lambda)(4-\lambda)(-4-\lambda) - 36 - 36 + 12(5-\lambda) + 18(4-\lambda) - 6(-4-\lambda) \\ &= -(\lambda-1)(\lambda-2)^2,\end{aligned}$$

d.h. die Eigenwerte von A sind $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_{2,3} = 2$.
Zur Berechnung des Kerns von

$$A - I = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

verwenden wir die folgenden Zeilenumformungen

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to Z_2/6; Z_3 \to Z_3 - Z_2/2, Z_1 = Z_1 + 3Z_2]{Z_1 \to Z_2; Z_2 \to Z_2 - 4Z_1; Z_3 \to Z_3 - 3Z_1;} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und lesen mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks ab

$$E_A(1) = \text{lin}\{\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix}\},$$

d.h. ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist gegeben durch $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Zur Berechnung des Kerns von

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

verwenden wir die folgenden Zeilenumformungen

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & -6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to Z_2 + Z_1]{Z_3 \to Z_3 - Z_1; Z_1 \to Z_1/3;} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und lesen mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks ab

$$E_A(2) = \text{lin}\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \},$$

d.h. die Eigenvektoren zum Eigenwert 2 sind gegeben durch $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Damit hat man

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:S} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=:D} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{=S^{-1}}$$

und es folgt

$$\begin{aligned} e^{tA} = Se^{tD}S^{-1} &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3e^t + 4e^{2t} & 6e^t - 6e^{2t} & 6e^t - 6e^{2t} \\ e^t - e^{2t} & -2e^t + 3e^{2t} & -2e^t + 2e^{2t} \\ -3e^t + 3e^{2t} & 6e^t - 6e^{2t} & 6e^t - 5e^{2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 6: Für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

gilt es

$$det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(2 - \lambda) - 6 = (\lambda - 4)(\lambda + 1),$$

d.h. die Eigenwerte von A sind 4 und -1.

Ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 4$ ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ mit

$$(A - 4I)\vec{v} = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad -3v_1 + 2v_2 = 0,$$

d.h. $\vec{v}$ ist z.B $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ähnlich erhalten wir, dass ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = -1$ ist $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und somit ist

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}_{=:S} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=:D} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}}_{=S^{-1}}.$$

Folglich

$$e^{tA} = Se^{tD}S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}e^{4t} + \frac{3}{5}e^{-t} & \frac{2}{5}e^{4t} - \frac{2}{5}e^{-t} \\ \frac{3}{5}e^{4t} - \frac{3}{5}e^{-t} & \frac{3}{5}e^{4t} + \frac{2}{5}e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Mit Variation der Konstanten erhält man

$$
\begin{aligned}
\vec{y}(t) &= e^{(t-t_0)A}\vec{y}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A} b(s) ds \\
&= \begin{pmatrix} \frac{2}{5}e^{4(t-t_0)} + \frac{3}{5}e^{-(t-t_0)} & \frac{2}{5}e^{4(t-t_0)} - \frac{2}{5}e^{-(t-t_0)} \\ \frac{3}{5}e^{4(t-t_0)} - \frac{3}{5}e^{-(t-t_0)} & \frac{3}{5}e^{4(t-t_0)} + \frac{2}{5}e^{-(t-t_0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{01} \\ y_{02} \end{pmatrix} \\
&\qquad + \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} \frac{2}{5}e^{4(t-s)} + \frac{3}{5}e^{-(t-s)} & \frac{2}{5}e^{4(t-s)} - \frac{2}{5}e^{-(t-s)} \\ \frac{3}{5}e^{4(t-s)} - \frac{3}{5}e^{-(t-s)} & \frac{3}{5}e^{4(t-s)} + \frac{2}{5}e^{-(t-s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2s \\ -4s \end{pmatrix} ds \\
&= \begin{pmatrix} e^{4(t-t_0)}\big(\frac{2}{5}y_{01} + \frac{2}{5}y_{02} - \frac{1}{5}t_0 - \frac{1}{20}\big) + e^{-(t-t_0)}\big(\frac{3}{5}y_{01} - \frac{2}{5}y_{02} - \frac{14}{5}t_0 + \frac{14}{5}\big) + 3t - \frac{11}{4} \\ e^{4(t-t_0)}\big(\frac{3}{5}y_{01} + \frac{3}{5}y_{02} - \frac{3}{10}t_0 - \frac{3}{40}\big) + e^{-(t-t_0)}\big(-\frac{3}{5}y_{01} + \frac{2}{5}y_{02} + \frac{14}{5}t_0 - \frac{14}{5}\big) - \frac{5}{2}t + \frac{23}{8} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$