

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

7. Übungsblatt

Aufgabe 1: Bestimmen Sie die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}\partial_t u(x, t) + 3\partial_x u(x, t) &= \frac{1}{2}e^{x+t}, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) &= e^{-x} + 3e^{-5x}, & x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie mit dem Charakteristikenverfahren die Lösung u des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}\partial_t u(x, t) + 4\partial_x u(x, t) &= u^2(x, t), & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) &= \cos x, & x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Aufgabe 3: Bestimmen Sie alle radialsymmetrischen Lösungen der Gleichung

$$\Delta u(\vec{x}) = -1, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Aufgabe 4: Bestimmen Sie die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}2\partial_t u(x, t) + 3\partial_x u(x, t) &= 2 \sin t e^{-\cos t}, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) &= e^{-\frac{x^2}{2}}, & x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Aufgabe 5: Bestimmen Sie mit dem Charakteristikenverfahren die Lösungen u der folgenden Anfangswertprobleme

(a)
$$\begin{aligned}\partial_t u(x, t) + (1 + u(x, t))\partial_x u(x, t) &= 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) &= 1 - x, & x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}x\partial_x u(x, y) + y\partial_y u(x, y) &= u(x, y) + 1, & (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x, y) &= x^2 & \text{auf } \Gamma = \{(x, y) : y = x^2\}.\end{aligned}$$

Aufgabe 6: Die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei zweimal stetig differenzierbar und die Funktion v sei definiert durch

$$v(r, \varphi) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

Zeigen Sie, dass für $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ der Laplace-Operator die folgende Darstellung hat

$$\Delta u(x, y) = \partial_{rr} v(r, \varphi) + \frac{1}{r} \partial_r v(r, \varphi) + \frac{1}{r^2} \partial_{\varphi\varphi} v(r, \varphi).$$

Die Aufgaben 1, 2 & 3 werden in der Übung am 23.1.2015 besprochen. Die restlichen Aufgaben werden im Tutorium am 30.1.2015 behandelt.