Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2014/15
12.01.2015

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 1: Die gegebene Differentialgleichung ist eine Transportgleichung mit

$$a = 3, \quad g(x,t) = \frac{1}{2}e^{x+t} \quad \text{und} \quad f(x) = e^{-x} + 3e^{-5x}.$$

Ihre Lösung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} u(x,t) &= f(x-3t) + \int_0^t g(x-3(t-s), s)\mathrm{d}s \\ &= e^{-(x-3t)} + 3e^{-5(x-3t)} + \int_0^t \frac{1}{2}e^{x-3(t-s)+s}\mathrm{d}s \\ &= e^{-(x-3t)} + 3e^{-5(x-3t)} + \frac{1}{2}e^{x-3t}\int_0^t e^{4s}\mathrm{d}s \\ &= e^{-(x-3t)} + 3e^{-5(x-3t)} + \frac{1}{8}e^{x+t} - \frac{1}{8}e^{x-3t}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Die gegebene Differentialgleichung ist äquivalent zu

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\vec{a}\left((x,t),u\right)} \cdot \nabla u(x,t) = \underbrace{u^2(x,t)}_{=\vec{b}\left((x,t),u\right)},$$

$$u(x,0) = \underbrace{\cos x}_{=f(x)}.$$

Zur Parametrisierung der x-Achse verwenden wir den reellen Parameter ξ, hier ist $\Gamma = \{(\xi, 0) : \xi \in \mathbb{R}\}$. Das charakteristische System und die Anfangsbedingungen lauten

$$\begin{aligned} \vec{k}'(s) &= \vec{a}\big(\vec{k}(s), \omega(s)\big) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} & \qquad \vec{k}(0) &= \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} \\ \omega'(s) &= \vec{b}\big(\vec{k}(s), \omega(s)\big) = \omega^2(s) & \qquad \omega(0) &= f(\xi) = \cos\xi \end{aligned}$$

mit Lösung

$$\begin{pmatrix} k_1(s,\xi) \\ k_2(s,\xi) \\ \omega(s,\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4s + \xi \\ s \\ \frac{\cos\xi}{1 - s\cos\xi} \end{pmatrix}.$$

Wir haben

$$\vec{k}(s,\xi) = \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad s = t, \xi = x - 4t$$

und somit ist

$$u(x,t) = \omega(t, x-4t) = \frac{\cos(x-4t)}{1 - t\cos(x-4t)}.$$

Aufgabe 3: Radialsymmetrische Funktionen sind von der Form

$$u(\vec{x}) = g(r) \quad \text{mit} \quad r = \|x\|.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
u_{x_i} &= \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x_i} = g'(r)\frac{x_i}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}} = g'(r)\frac{x_i}{r}, \\
u_{x_ix_i} &= \frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}r^2}\Big(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x_i}\Big)^2 + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}x_i^2} = g''(r)\frac{x_i^2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2} + g'(r)\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_i^2}{x_1^2+x_2^2+{x_3^2}^{\frac{3}{2}}} \\
&= g''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + g'(r)\frac{r^2-x_i^2}{r^3}
\end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned}
\Delta u(\vec{x}) &= u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_2x_2} \\
&= g''(r)\Big(\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{r^2}\Big) + g'(r)\Big(\frac{3r^2-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)}{r^3}\Big) \\
&= g''(r)\Big(\frac{r^2}{r^2}\Big) + g'(r)\Big(\frac{3r^2-r^2}{r^3}\Big) \\
&= g''(r) + \frac{2}{r}g'(r)
\end{aligned}$$

und

$$\Delta u(\vec{x}) = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad g''(r) + \frac{2}{r}g'(r) = -1.$$

Mit $h(r) = g'(r)$ ist diese Gleichung äquivalent zu

$$h'(r) + \frac{2}{r}h(r) = -1.$$

Die Lösung dieser linearen Differentialgleichung ist

$$h(r) = \frac{C_1}{r^2} - \frac{1}{3}r, \qquad\qquad C_1 \in \mathbb{R}, r \neq 0$$

und somit

$$u(\vec{x}) = g(r) = \int h(r)\mathrm{d}r = -\frac{C_1}{r} - \frac{1}{6}r^2 + C_2, \qquad\qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, r \neq 0.$$

Aufgabe 4: Die gegebene Differentialgleichung ist eine Transportgleichung mit

$$a = \frac{3}{2}, \quad g(x,t) = \sin t e^{-\cos t} \quad \text{und} \quad f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Ihre Lösung ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= f(x - \frac{3}{2}t) + \int_0^t g(x - \frac{3}{2}(t-s), s)\mathrm{d}s \\
&= e^{-\frac{(x-\frac{3}{2}t)^2}{2}} + \int_0^t \sin s e^{-\cos s}\mathrm{d}s \\
&= e^{\frac{(3t-2x)^2}{8}} + \int_0^t e^{-\cos s}\mathrm{d}(-\cos \mathrm{s}) \\
&= e^{\frac{(3t-2x)^2}{8}} + e^{-\cos t} + e^{-1}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 5:

(a) Die gegebene Differentialgleichung ist äquivalent zu

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1+u(x,t) \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\vec{a}\left((x,t),u\right)} \cdot \nabla u(x,t) = \underbrace{0}_{=\vec{b}\left((x,t),u\right)},$$

$$u(x,0) = \underbrace{1-x}_{=f(x)}.$$

Zur Parametrisierung der x-Achse verwenden wir den reellen Parameter ξ, hier ist $\Gamma = \{(\xi,0) : \xi \in \mathbb{R}\}$. Das charakteristische System und die Anfangsbedingungen lauten

$$\vec{k}'(s) = \vec{a}\big(\vec{k}(s),\omega(s)\big) = \begin{pmatrix} 1+\omega(s) \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{k}(0) = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\omega'(s) = \vec{b}\big(\vec{k}(s),\omega(s)\big) = 0 \qquad \omega(0) = f(\xi) = 1-\xi.$$

Zuerst lösen wir die dritte Gleichung:

$$\omega'(s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega(s,\xi) = const = \omega(0) = 1-\xi.$$

Folglich ist die erste Gleichung

$$k_1'(s) = 1+1-\xi = 2-\xi \quad \text{mit} \quad k_1(0) = \xi$$

und ihre Lösung ist

$$k_1(s,\xi) = (2-\xi)s + \xi.$$

Die Lösung der zweiten Gleichung ist

$$k_2(s,\xi) = s.$$

Wir haben

$$\vec{k}(s,\xi) = \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad s = t, \xi = \frac{x-2t}{1-t}$$

und somit ist

$$u(x,t) = \omega(t, \frac{x-2t}{1-t}) = \frac{1-x+t}{1-t}.$$

(b) Die gegebene Differentialgleichung ist äquivalent zu

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{=\vec{a}\left((x,y),u\right)} \cdot \nabla u(x,y) = \underbrace{u(x,y)+1}_{=\vec{b}\left((x,y),u\right)},$$

$$u(x,y) = \underbrace{x^2}_{=f(x)} \text{ auf } \Gamma = \{(x,y) : y = x^2\}.$$

Zur Parametrisierung von Γ verwenden wir den reellen Parameter ξ, hier ist $\Gamma = \{(\xi,\xi^2) : \xi \in \mathbb{R}\}$. Das charakteristische System und die Anfangsbedingungen lauten

$$\vec{k}'(s) = \vec{a}\big(\vec{k}(s),\omega(s)\big) = \begin{pmatrix} k_1(s) \\ k_2(s) \end{pmatrix} \qquad \vec{k}(0) = \begin{pmatrix} \xi \\ \xi^2 \end{pmatrix}$$

$$\omega'(s) = \vec{b}\big(\vec{k}(s),\omega(s)\big) = \omega(s)+1 \qquad \omega(0) = f(\xi) = \xi^2$$

mit Lösung

$$\begin{pmatrix} k_1(s,\xi) \\ k_2(s,\xi) \\ \omega(s,\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi e^s \\ \xi^2 e^s \\ \xi^2 e^s - 1 + e^s \end{pmatrix}.$$

Wir haben

$$\vec{k}(s,\xi) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad s = \ln\Big(\frac{x^2}{y}\Big), \xi = \frac{y}{x}$$

und somit ist

$$u(x,t) = \omega(\ln\Big(\frac{x^2}{y}\Big), \frac{y}{x}) = y + \frac{x^2}{y} - 1.$$

Aufgabe 6:

$$(x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \quad \Leftrightarrow \quad r = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{und} \quad \varphi = \arctan\frac{y}{x}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\partial_x u(x,y) &= \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\
&= \partial_r v \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \partial_\varphi v \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{(-y)}{x^2} = \partial_r v\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \partial_\varphi v \frac{(-y)}{x^2+y^2}, \\
\partial_{xx} u(x,y) &= \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\Big(\frac{\partial r}{\partial x}\Big)^2 + \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big)^2 + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \\
&= \partial_{rr} v \frac{x^2}{x^2+y^2} + \partial_r v \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \partial_{\varphi\varphi} v \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2} + \partial_\varphi \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \\
\partial_y u(x,y) &= \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\
&= \partial_r v \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \partial_\varphi v \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{1}{x} = \partial_r v\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \partial_\varphi v \frac{x}{x^2+y^2}, \\
\partial_{yy} u(x,y) &= \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\Big(\frac{\partial r}{\partial y}\Big)^2 + \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\Big)^2 + \frac{\partial v}{\partial \varphi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \\
&= \partial_{rr} v \frac{y^2}{x^2+y^2} + \partial_r v \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \partial_{\varphi\varphi} v \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} + \partial_\varphi \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

und somit ist

$$\begin{aligned}
\Delta u(x,y) &= \partial_{xx} u(x,y) + \partial_{yy} u(x,y) \\
&= \partial_{rr} v \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} + \partial_r v \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \partial_{\varphi\varphi} v \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} + \partial_\varphi \frac{2xy-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \partial_{rr} v + \partial_r v \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} + \partial_{\varphi\varphi} v \frac{1}{x^2+y^2} \\
&= \partial_{rr} v + \frac{1}{r}\partial_r v + \frac{1}{r^2}\partial_{\varphi\varphi} v.
\end{aligned}$$