Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Silvana Avramska-Lukarska

WS 2014/15
09.02.2015

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 8. Übungsblatt

Aufgabe 1: Mit dem Separationsansatz $u(x,y) = v(x)w(y), v \neq 0, w \neq 0$ ist die gegebene Differentialgleichung äquivalent zu

$$v''(x)w(y) + v(x)w''(y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{v''(x)}{v(x)} = -\frac{w''(y)}{w(y)}.$$

Da die linke Seite nicht von y und die rechte Seite nicht von x abhängt, geht dies nur, wenn es eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = -\frac{w''(y)}{w(y)} = \lambda.$$

Dies führt auf

$$v''(x) - \lambda v(x) = 0 \quad \text{mit} \quad v(0) = 0, \quad v(2) = 0 \tag{1}$$

und

$$w''(y) + \lambda w(y) = 0 \quad \text{mit} \quad w(0) = 0, \tag{2}$$

wobei wir auch die Randbedingungen des ursprünglichen Problems berücksichtigt haben.
Die Lösung der ersten Gleichung ist

$$v(x) = \begin{cases} C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}, & \text{für } \lambda > 0, \\ C_1 + C_2 x, & \text{für } \lambda = 0, \\ C_1 \sin(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x), & \text{für } \lambda < 0. \end{cases}$$

Die Randbedingungen implizieren

$$\begin{cases} C_1 = -C_2 = 0, & \text{für } \lambda > 0, \\ C_1 = C_2 = 0, & \text{für } \lambda = 0, \\ C_2 = 0 \quad \text{und} \quad 2\sqrt{-\lambda} = 0 + n\pi, n \in \mathbb{N} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{4}, & \text{für } \lambda < 0, \end{cases}$$

d.h. die Lösung der Gleichung (1) ist

$$v_n(x) = C_1^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right).$$

Jetzt betrachten wir die Gleichung (2) mit $\lambda = \lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{4}$. Ihre Lösung ist

$$w_n(y) = C_3^n e^{\frac{n\pi}{2}y} + C_4^n e^{-\frac{n\pi}{2}y}$$

und mit Hilfe des Anfangswertes erhalten wir $C_3^n = -C_4^n$.
Zusammen haben wir also Lösungen

$$\begin{aligned} u_n(x,y) &= v_n(x)w_n(y) \\ &= C_1^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)\left[C_3^n e^{\frac{n\pi}{2}y} - C_3^n e^{-\frac{n\pi}{2}y}\right] = \underbrace{2C_1^n C_3^n}_{=:A_n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{2}y\right) \end{aligned}$$

und formell (nur wenn diese Reihe einen Sinn hat!)

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{2}y\right).$$

Wegen $u(x,1) = \sin(\pi x)$ folgt (durch Koeffizientenvergleich) $A_2 = \frac{1}{\sinh \pi}$ und $A_n = 0$ für $n \neq 2$. D.h. die Lösung der gegebenen Differentialgleichung ist

$$u(x,y) = \frac{1}{\sinh \pi} \sin(\pi x) \sinh(\pi y).$$

Aufgabe 2: Mit dem Separationsansatz $u(x,t) = v(x)w(t), v \neq 0, w \neq 0$ ist die gegebene Differentialgleichung äquivalent zu

$$v(x)w'(t) = v''(x)w(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w'(t)}{w(t)}.$$

Da die linke Seite nicht von t und die rechte Seite nicht von x abhängt, geht dies nur, wenn es eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w'(t)}{w(t)} = \lambda.$$

Dies führt auf

$$v''(x) - \lambda v(x) = 0 \quad \text{mit} \quad v(0) = 0, \quad v(1) = 0 \tag{3}$$

und

$$w'(t) - \lambda w(t) = 0, \tag{4}$$

wobei wir auch die Randbedingungen des ursprünglichen Problems berücksichtigt haben.
Die Lösung der ersten Gleichung ist

$$v(x) = \begin{cases} C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}, & \text{für } \lambda > 0, \\ C_1 + C_2 x, & \text{für } \lambda = 0, \\ C_1 \sin(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x), & \text{für } \lambda < 0. \end{cases}$$

Die Randbedingungen implizieren

$$\begin{cases} C_1 = -C_2 = 0, & \text{für } \lambda > 0, \\ C_1 = C_2 = 0, & \text{für } \lambda = 0, \\ C_2 = 0 \quad \text{und} \quad \sqrt{-\lambda} = 0 + n\pi, n \in \mathbb{N} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \lambda_n = -n^2\pi^2, & \text{für } \lambda < 0, \end{cases}$$

d.h. die Lösung der Gleichung (3) ist

$$v_n(x) = C_1^n \sin(n\pi x).$$

Jetzt betrachten wir die Gleichung (4) mit $\lambda = \lambda_n = -n^2\pi^2$. Ihre Lösung ist

$$w_n(t) = C_3^n e^{-n^2\pi^2 t}.$$

Zusammen haben wir also Lösungen

$$u_n(x,t) = v_n(x)w_n(t) = \underbrace{C_1^n C_3^n}_{=:A_n} \sin(n\pi x) e^{-n^2\pi^2 t}$$

und formell (nur wenn diese Reihe einen Sinn hat!)

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(n\pi x) e^{-n^2\pi^2 t}.$$

Wegen $u(x,0) = 6\sin(\pi x)$ folgt (durch Koeffizientenvergleich) $A_1 = 6$ und $A_n = 0$ für $n \neq 1$. D.h. die Lösung der gegebenen Differentialgleichung ist

$$u(x,t) = 6\sin(\pi x) e^{-\pi^2 t}.$$

Aufgabe 3: Da $f(x) = \sin x \in C^2(\mathbb{R})$ und $g(x) = \cos x \in C^1(\mathbb{R})$ folgt

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\sin(x+t)}_{=f(x+t)} + \underbrace{\sin(x-t)}_{=f(x-t)}\Big) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \underbrace{\cos y}_{=g(y)}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\Big(\sin(x+t) + \sin(x-t)\Big) + \frac{1}{2}\sin y\Big|_{x-t}^{x+t} \\
&= \sin(x+t).
\end{aligned}$$

Aufgabe 4: Mit dem Separationsansatz $u(x,y) = v(x)w(y), v \neq 0, w \neq 0$ ist die gegebene Differentialgleichung äquivalent zu

$$v''(x)w(y) + v(x)w''(y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{v''(x)}{v(x)} = -\frac{w''(y)}{w(y)}.$$

Da die linke Seite nicht von y und die rechte Seite nicht von x abhängt, geht dies nur, wenn es eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = -\frac{w''(y)}{w(y)} = \lambda.$$

Dies führt auf

$$v''(x) - \lambda v(x) = 0 \tag{5}$$

und

$$w''(y) + \lambda w(y) = 0 \quad \text{mit} \quad w(0) = 0, \quad w(\pi) = 0, \tag{6}$$

wobei wir auch die Randbedingungen des ursprünglichen Problems berücksichtigt haben.
Die Lösung der zweiten Gleichung ist

$$w(y) = \begin{cases} C_1 e^{\sqrt{-\lambda}y} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}y}, & \text{für } \lambda < 0, \\ C_1 + C_2 y, & \text{für } \lambda = 0, \\ C_1 \sin(\sqrt{\lambda}y) + C_2\cos(\sqrt{\lambda}y), & \text{für } \lambda > 0. \end{cases}$$

Die Randbedingungen implizieren

$$\begin{cases} C_1 = -C_2 = 0, & \text{für } \lambda < 0, \\ C_1 = C_2 = 0, & \text{für } \lambda = 0, \\ C_2 = 0 \quad \text{und} \quad \sqrt{\lambda}\pi = 0 + n\pi, n \in \mathbb{N} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \lambda_n = n^2, & \text{für } \lambda > 0, \end{cases}$$

d.h. die Lösung der Gleichung (6) ist

$$w_n(y) = C_1^n \sin(ny).$$

Jetzt betrachten wir die Gleichung (5) mit $\lambda = \lambda_n = n^2$. Ihre Lösung ist

$$v_n(x) = C_3^n e^{nx} + C_4^n e^{-nx}.$$

Zusammen haben wir also Lösungen

$$\begin{aligned} u_n(x,y) &= v_n(x) w_n(y) \\ &= \Big(C_3^n e^{nx} + C_4^n e^{-nx}\Big) C_1^n \sin(ny) = \Big(\underbrace{C_1^n C_3^n}_{=:A_n} e^{nx} + \underbrace{C_1^n C_4^n}_{=:B_n} e^{-nx}\Big) \sin(ny) \end{aligned}$$

und formell (nur wenn diese Reihe einen Sinn hat!)

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(A_n e^{nx} + B_n e^{-nx}\Big) \sin(ny).$$

Wegen $u(0,y) = -\sin(y)$ folgt (durch Koeffizientenvergleich) $A_1 + B_1 = -1$ und $A_n = 0$ für $n \neq 1$. Da

$$u(1,y) = (A_1 e^1 + \underbrace{(-1 - A_1)}_{=B_1} e^{-1}) \sin y \overset{!}{=} \sin y,$$

folgt $A_1 = \frac{1}{e-1}$. D.h. die Lösung der gegebenen Differentialgleichung ist

$$u(x,y) = \Big(\frac{e+1}{e-1} e^x \underbrace{- \frac{e}{e-1}}_{=-1-A_1} e^{-x}\Big) \sin y.$$

Aufgabe 5: Mit dem Separationsansatz $u(x,t) = v(x)w(t), v \neq 0, w \neq 0$ ist die gegebene Differentialgleichung äquivalent zu

$$v(x)w'(t) = v''(x)w(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w'(t)}{w(t)}.$$

Da die linke Seite nicht von t und die rechte Seite nicht von x abhängt, geht dies nur, wenn es eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w'(t)}{w(t)} = \lambda.$$

Dies führt auf

$$v''(x) - \lambda v(x) = 0 \quad \text{mit} \quad v'(0) = 0, \quad v'(1) = 0 \tag{7}$$

und

$$w'(t) - \lambda w(t) = 0, \tag{8}$$

wobei wir auch die Randbedingungen des ursprünglichen Problems berücksichtigt haben.
Die Lösung der ersten Gleichung ist

$$v(x) = \begin{cases} C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}, & \text{für } \lambda > 0, \\ C_1 + C_2 x, & \text{für } \lambda = 0, \\ C_1 \sin(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x), & \text{für } \lambda < 0 \end{cases}$$

und folglich

$$v'(x) = \begin{cases} C_1 \sqrt{\lambda} e^{\sqrt{\lambda}x} - C_2 \sqrt{\lambda} e^{-\sqrt{\lambda}x}, & \text{für } \lambda > 0, \\ C_2, & \text{für } \lambda = 0, \\ C_1 \sqrt{-\lambda} \cos(\sqrt{-\lambda}x) - C_2 \sqrt{-\lambda} \sin(\sqrt{-\lambda}x), & \text{für } \lambda < 0. \end{cases}$$

Die Randbedingungen implizieren

$$\begin{cases} C_1 = C_2 = 0, & \text{für } \lambda > 0, \\ C_2 = 0, & \text{für } \lambda = 0, \\ C_1 = 0 \quad \text{und} \quad \sqrt{-\lambda} = 0 + n\pi, n \in \mathbb{N} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \lambda_n = -n^2\pi^2, & \text{für } \lambda < 0, \end{cases}$$

d.h. die Lösung der Gleichung (7) ist

$$v_n(x) = \begin{cases} C_1^n, & \text{für } \lambda = 0, \\ C_2^n \cos(n\pi x), & \text{für } \lambda < 0. \end{cases}$$

Jetzt betrachten wir die Gleichung (8) mit $\lambda = \lambda_n = -n^2\pi^2$. Ihre Lösung ist

$$w_n(t) = C_3^n e^{-n^2\pi^2 t} = \begin{cases} C_3^n, & \text{für } \lambda = 0, \\ C_3^n e^{-n^2\pi^2 t}, & \text{für } \lambda < 0. \end{cases}$$

Zusammen haben wir also Lösungen

$$u_n(x,t) = v_n(x) w_n(t) = \begin{cases} \underbrace{C_1^n C_3^n}_{=:A_n}, & \text{für } \lambda = 0, \\ \underbrace{C_2^n C_3^n}_{=:B_n} \cos(n\pi x) e^{-n^2\pi^2 t}, & \text{für } \lambda < 0. \end{cases}$$

und formell (nur wenn diese Reihe einen Sinn hat!)

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} A_n, & \text{für } \lambda = 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos(n\pi x) e^{-n^2\pi^2 t}, & \text{für } \lambda < 0. \end{cases}$$

Hier kann man $\lambda = 0$ ausschließen, da sonst $u(x,0) = \cos(\pi x) - 4\cos(6\pi x)$ nicht erfullt sein könnte. Da für $\lambda < 0$

$$u(x,0) = B_n \cos(n\pi x) \stackrel{!}{=} \cos(\pi x) - 4\cos(6\pi x),$$

folgt (durch Koeffizientenvergleich) $B_1 = 1, B_6 = -4$ und $B_n = 0$ für $n \notin \{1,6\}$. D.h. die Lösung der gegebenen Differentialgleichung ist

$$u(x,t) = \cos(\pi x) e^{-\pi^2 t} - 4\cos(6\pi x) e^{-36\pi^2 t}.$$

Aufgabe 6: Mit

$$v(x,t) := u(2x,t).$$

gilt es

$$\begin{aligned} \partial_{tt} v(x,t) - \partial_{xx} v(x,t) = \partial_{tt} u(x,t) - 4\partial_{xx} u(x,t) = 0, \\ v(x,0) = u(2x,0) = \underbrace{0}_{=f(x)}, \\ \partial_t v(x,0) = \partial_t u(2x,0) = \underbrace{2x}_{=g(x)}. \end{aligned}$$

Da $f \in C^2(\mathbb{R})$ und $g(x) \in C^1(\mathbb{R})$ folgt

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \underbrace{2y}_{=g(y)} \, \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2} y^2 \Big|_{x-t}^{x+t} = 2xt \end{aligned}$$

und deswegen

$$u(x,t) = v\left(\frac{x}{2}, t\right) = xt.$$