Karlsruher Institut für Technologie (KIT) WS 2019/2020
Institut für Analysis
Dr. Ioannis Anapolitanos
Dr. Semjon Wugalter

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1 **a)** Die Gleichung lässt sich für $x \neq 0$ in der Form

$$y' = \frac{1+y^2}{y} \frac{1}{x(1+x^2)}$$

schreiben. Es handelt sich um eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen $y' = f(x)g(y)$, wobei

$$g(y) = \frac{1+y^2}{y}, \qquad f(x) = \frac{1}{x(1+x^2)}.$$

Die Lösung y des Anfangswertproblems ist gegeben durch (Beachte: $g(2) = 5/2 \neq 0$)

$$\int_2^{y(x)} \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int_1^x f(t)\, dt.$$

Für den Integranden auf der rechten Seite gilt

$$\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{1+t^2-t^2}{t(1+t^2)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2},$$

und damit bekommt man für das Integral der rechten Seite

$$\int_1^x f(t)\, dt = \int_1^x \frac{1}{t} - \frac{1}{2}\frac{2t}{1+t^2}\, dt = \left[\ln|t| - \tfrac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_1^x = \ln|x| - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + \tfrac{1}{2}\ln 2.$$

Außerdem gilt

$$\int_2^{y(x)} \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int_2^{y(x)} \frac{\eta}{1+\eta^2}\, d\eta = \left[\tfrac{1}{2}\ln(1+\eta^2)\right]_2^{y(x)} = \tfrac{1}{2}\ln(1+y(x)^2) - \tfrac{1}{2}\ln 5.$$

Gleichsetzen der Integrale und Multiplikation mit 2 liefert

$$\ln(1+y(x)^2) = \underbrace{2\ln|x|}_{=\ln x^2} - \ln(1+x^2) + \underbrace{\ln 2 + \ln 5}_{=\ln 10}$$

bzw.

$$1 + y(x)^2 = e^{\ln x^2} \cdot \frac{1}{e^{\ln(1+x^2)}} \cdot e^{\ln 10} = \frac{10x^2}{1+x^2}.$$

Die Lösung ist somit

$$y(x) = \sqrt{\frac{10x^2}{1+x^2} - 1} = \sqrt{\frac{9x^2-1}{1+x^2}},$$

und zwar für $x > \frac{1}{3}$. (Dabei ergibt sich das Vorzeichen der Wurzel aus $y(1) = 2 > 0$.)

b) Wir setzen beide Seiten der Gleichung in die Exponentialfunktion ein:

$$y' = \exp\bigl(x - y - e^y\bigr), \qquad \text{also} \qquad y' = e^x e^{-y} e^{-e^y}.$$

Dies ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen. Wir lösen das Anfangswertproblem $y' = e^x e^{-y} e^{-e^y}$, $y(1) = 0$ mit der in Abschnitt 1.5 vorgestellten Methode [$f(x) = e^x$, $g(y) = e^{-y}e^{-e^y}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$]. Wegen $g(y_0) = e^{-1} \neq 0$ ist die Lösung gegeben durch

$$\int_0^{y(x)} \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int_1^x f(t)\,dt.$$

Für das Integral auf der linken Seite ergibt sich

$$\int_0^{y(x)} e^{\eta} e^{e^{\eta}}\,d\eta = \left[e^{e^{\eta}}\right]_{\eta=0}^{y(x)} = e^{e^{y(x)}} - e,$$

das Integral auf der rechten Seite ist gleich

$$\int_1^x f(t)\,dt = \left[e^t\right]_{t=1}^x = e^x - e.$$

Dies führt auf $e^{e^{y(x)}} = e^x$. Somit ist $y(x) = \ln(\ln(e^x)) = \ln x$ die auf $(0,\infty)$ definierte Lösung des gegebenen Anfangswertproblems.

Aufgabe 2 Bei allen drei Aufgabenteilen handelt es sich um Bernoullische Differentialgleichungen. Außerdem erfüllt $y \equiv 0$ keine der Anfangsbedingungen und ist damit keine Lösung. Da die entsprechenden Exponenten der Bernoulli-Gleichungen ganzzahlig sind, genügt es daher nach nicht verschwindenden Lösungen zu suchen.

a) $y' = 3y + e^{-x}y^2\,, \quad y(0) = 1$. Hier ist $\alpha = 2$ und es gilt $y' - 3y - e^{-x}y^2 = 0$.
Wir multiplizieren mit $(1-\alpha)y^{-\alpha}$ $(= -\frac{1}{y^2})$ und erhalten:

$$-\frac{y'}{y^2} + 3\frac{1}{y} + e^{-x} = 0.$$

Wir setzen $z := y^{1-\alpha}$ $(= \frac{1}{y})$. Es gilt dann $z(0) = \frac{1}{y(0)} = 1$ und $z' = -\frac{y'}{y^2}$. Wir erhalten also:

$$z' + 3z + e^{-x} = 0\,, \quad z(0) = 1.$$

Gemäß 1.1 folgt (wegen $\int_0^x -3dt = -3x$) $z(x) = 1e^{-3x} + e^{-3x}\int_0^x e^{3t}(-e^{-t})dt = e^{-3x} + e^{-3x}[-e^{2t}/2]_{t=0}^{t=x} = \frac{3}{2}e^{-3x} - \frac{1}{2}e^{-x} = \frac{1}{2}e^{-x}(3e^{-2x} - 1)$.
Nun ermitteln wir die Nullstellen von z. Aus $z(c_0) = 0$ folgt $3e^{-2c_0} - 1 = 0$, also ist $c_0 = \frac{\ln 3}{2} > 0$ die einzige Nullstelle von z. Also verschwindet z auf $(-\infty, c_0)$ nicht und wir erhalten

$$y_0(x) := 1/z(x) = \frac{2e^x}{3e^{-2x} - 1}\,, \quad x \in (-\infty, c_0)$$

als Lösung des Anfangswertproblems.

b) $y' + y^2 - xy - y/x = 0\,, \quad y(1) = 1$. Hier ist $\alpha = 2$ und es gilt $y' - (x + 1/x)y + y^2 = 0$.
Wir suchen Lösungen in einer Umgebung von 1 innerhalb von $(0,\infty)$ (wegen des Terms $1/x$).
Wir multiplizieren mit $(1-\alpha)y^{-\alpha}$ $(= -\frac{1}{y^2})$ und erhalten:

$$-\frac{y'}{y^2} + \frac{(x + 1/x)}{y} - 1 = 0.$$

Wir setzen $z := y^{1-\alpha}$ $(= \frac{1}{y})$. Es gilt dann $z(1) = \frac{1}{y(1)} = 1$ und $z' = -\frac{y'}{y^2}$. Wir erhalten also:

$$z' + (x + 1/x)z - 1 = 0\,, \quad z(1) = 1.$$

Gemäß 1.1 folgt (wegen $\int_1^x -(t + 1/t)dt = -x^2/2 - \ln x + 1/2$):
$z(x) = 1e^{-x^2/2 - \ln x + 1/2} + e^{-x^2/2 - \ln x + 1/2}\int_1^x e^{t^2/2 + \ln t - 1/2}dt =$

$$\sqrt{e}x^{-1}e^{-x^2/2} + \sqrt{e}x^{-1}e^{-x^2/2} \cdot 1/\sqrt{e}[e^{t^2/2}]_{t=1}^{t=x} = \sqrt{e}x^{-1}e^{-x^2/2} + x^{-1} - \sqrt{e}x^{-1}e^{-x^2/2} = x^{-1}.$$

Auf $(0,\infty)$ verschwindet z offensichtlich nicht und wir erhalten

$$y_0(x) := 1/z(x) = x\,, \quad x \in (0,\infty)$$

als Lösung des Anfangswertproblems.

c) $y' + xy + \frac{1}{2}(xy)^3 = 0\,, \quad y(0) = \sqrt{2}$. Hier ist $\alpha = 3$.
Wir multiplizieren mit $(1-\alpha)y^{-\alpha}$ $(= -2\frac{1}{y^3})$ und erhalten:

$$-\frac{2y'}{y^3} - \frac{2x}{y^2} - x^3 = 0.$$

Wir setzen $z := y^{1-\alpha}$ $(= \frac{1}{y^2})$. Es gilt dann $z(0) = \frac{1}{(y(0))^2} = 1/2$ und $z' = -2\frac{y'}{y^3}$. Wir erhalten also:

$$z' - 2xz - x^3 = 0\,, \quad z(0) = 1/2.$$

Dann folgt (wegen $\int_0^x 2tdt = x^2$) $z(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}(t^3)dt = \frac{1}{2}e^{x^2} + e^{x^2}[-\frac{(t^2+1)e^{-t^2}}{2}]_{t=0}^{t=x} = \frac{1}{2}e^{x^2} - \frac{x^2+1}{2} + \frac{1}{2}e^{x^2} = e^{x^2} - \frac{x^2+1}{2}$.
(Die dabei verwendete Stammfunktion kann man etwa durch Produktintegration (mit $u = x^2$ und $v' = xe^{-x^2}$) gewinnen: $\int t^3 e^{-t^2}\,dt = t^2 \cdot \frac{-e^{-t^2}}{2} - \int 2t \cdot \frac{-e^{-t^2}}{2}\,dt = -\frac{t^2e^{-t^2}}{2} - \frac{e^{-t^2}}{2} = -\frac{(t^2+1)e^{-t^2}}{2}$.)
Wir zeigen nun, dass z keine Nullstelle hat: Es gilt $z'(x) = 2xe^{x^2} - x = x(2e^{x^2}-1)$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $2e^{x^2} \geq 2e^0 = 2 > 1$. Daher gilt $z'(x) < 0$ für $x < 0$, $z'(x) > 0$ für $x > 0$ und $z'(0) = 0$. Das bedeutet, dass die Funktion z auf $(-\infty,0)$ streng monoton fällt, auf $(0,\infty)$ streng monoton steigt und bei 0 ihr globales Minumum $z(0) = 1/2 > 0$ annimmt. Also hat z keine Nullstelle.
Aus $y^2 = 1/z$ folgt $y = 1/\sqrt{z}$ oder $y = -1/\sqrt{z}$. Wegen $y(0) = \sqrt{2} > 0$ ist der zweite Fall keine Lösung und wir erhalten

$$y_0(x) := \frac{1}{\sqrt{z(x)}} = \frac{1}{\sqrt{e^{x^2} - \frac{1}{2}(x^2+1)}}\,, \quad x \in \mathbb{R}$$

als Lösung des Anfangswertproblems.