Formelsammlung

1. Trennung der Variablen

$y'(x) = f(x)g(y)$ Falls $y(x_0)=y_0$

$$\int_{y_0=y(x_0)}^{y(x)} \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$$

2. Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(x) = a(x)y(x) + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$$\boxed{A(x) = \int_{x_0}^{x} a(x)dx} \Rightarrow \boxed{y(x) = y_0 e^{A(x)} + e^{A(x)} \int_{t=x_0}^{t=x} e^{-A(t)} \cdot b(t)dt}$$

z.B.

$y' = \underbrace{\frac{2{,}5}{x}}\, y + x^{3,5} e^{x}$ $\quad y(1)=2 \rightarrow$ Anfangsbedingung setzen

$G(x) = -2{,}5\ln(x) = \int^{x} -\frac{2{,}5}{x}dx$

$\Rightarrow e^{G(x)} \rightarrow$ beiden Seiten multiplizieren

2. Bernoulli-DGL

$\alpha \neq 0{,}1$

$$\boxed{y'(x) + g(x)y(x) + h(x)y^{\alpha} = 0}$$

Trick: Multiplikation mit $\boxed{(1-\alpha)y^{-\alpha}}$

$y(x_0) \rightarrow$ Nicht angegeben $\Rightarrow$ 1. Homog. Gleichung 2. Inhom. –''– mit Variation der Konsta

$y_{allg} = y_{hom} + y_{inh}$ $\quad$ z.B. $y_{all} = \underbrace{C \cdot \frac{1}{x}}_{Hom.} + \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{Inh.}$

3. Riccati DGL:

$\phi \rightarrow$ eine Lösung gegeben.

$$\boxed{y'(x) + g(x)y(x) + h(x)y^2(x) = k(x)} \Rightarrow (y-\phi)' + g(y-\phi) + \ldots = 0 \quad \boxed{y-\phi = u}$$

4. Exakte DGL

$D \subset \mathbb{R}^2$ offen; $P, Q : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \rightarrow$ exakt in D wenn

$\frac{\partial V_x}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial x}$ $\quad \vec{V} = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix}$ Potentialfeld $\Leftrightarrow \boxed{P_y = Q_x}$

$F: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\boxed{\nabla F = \vec{V}(x,y)}$ $\quad F \rightarrow$ Potential von $\vec{V}$ der Lösung $Pdx+Qdy=0$

$\Rightarrow \boxed{F(x,y) = c}$ Implizite Form mit $C \in \mathbb{R}$

Falls geg. $y(1)=2 \Rightarrow F(1,2)$ berechnen $= C$

$F(x,y) = $ Zahl $\rightarrow$ Implizite Lösung.

$y(x) = \ldots \rightarrow$ Explizite –''–.

$\rightarrow$ Integrierender Faktor: ① $\mu = \mu(x)$ ② $\mu(y) = \mu$ ③ $\mu = \mu(x,y)$ $\quad \| \frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$

z.B. $\mu = \rho(x^2+y^2) \Rightarrow \mu_x = 2x\rho'(x^2+y^2) \mid \mu_y = 2y\rho'(x^2+y^2)$

– Inhomogenität der Art: $\boxed{f(x) = q(x)e^{dx}\cos(kx)}$ (oder $\sin kx$)

$q(x) \rightarrow$ Polynom vom Grad $(n) \Rightarrow r_1(x)$ und $r_2(x)$ sind auch Polynomen vom Grad (n) so wie $q(x)$.

$d+ik$	Form der Partikulären Lösung
keine NST von $P(\lambda)$	$r_1(x)e^{dx}\cos(kx) + r_2(x)e^{dx}\sin(kx) = f(x)$
Einfache Nullstelle	$x \cdot f(x)$, $f(x)$ wie oben
Zweifache Nullstelle	$x^2 f(x)$, $f(x)$ wie oben
n-fache Nullstelle	$x^n f(x)$, $f(x)$ wie oben

$r_1(x)$ und $r_2(x)$ zu bestimmen. Wir setzen y_p in die inhom. Glei. und durch Koeff. vergleich finden $r_1(x)$ und $r_2(x)$.

z.B. $r_1(x) = Ax+B$ vom Grad 1. A und B zu bestimmen

8. Eulersche DGL

$$x^n y^{(n)}(x) + x^{n-1} a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + x^{n-2} a_{n-2} y^{(n-2)}(x) + \ldots + x a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0$$

$a_{n-1}, \ldots a_0 \in \mathbb{R}$ Konstant.

$(n-2)$-te Ableitung $\rightarrow x$ hoch $(n-2)$

5. Lineare DGL 2. Ordnung:

$$\boxed{y''(x) + P(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x)}$$

Homogen $\Rightarrow f(x) = 0$
Inhom. $\Rightarrow f(x) \neq 0$

Lösungsraum hom. Glei. = Vektorraum Dimension 2. $\rightarrow$ Eine Basis = Fundamentalsystem der homog. DGL.

• Wronski Determinante:

$$w(x) = \det\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}$$

Lösung: Verf. von D'Alembert: $y_1(x)$ – Lösung von $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0 \leftarrow$ homogene Gleichung

$\boxed{y_2(x) = V(x) \cdot y_1(x)}$ Ansatz. $\Rightarrow y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1 = 0$

$\Rightarrow (Vy_1)'' + P(x) \cdot (Vy_1)' + q(x) \cdot Vy_1 = f(x) \rightarrow$ Inh. Gleichung

$z = V'$ $\quad$ $z \rightarrow$ in Abh. von Konst. $V \rightarrow$ –''– auch. $\quad V(x) \cdot y_1(x) = y_p(x)$

$\boxed{y_{allg} = C_1 y_1(x) + C_2 V(x) y_1(x)}$ $\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ – Kons

6. DGL höherer Ordnungen:

$$y^{(n)} + P_{n-1}(x) y^{(n-1)}(x) + \ldots + P_1 y'(x) + P_0(x)y(x) = f(x)$$

$f=0 \rightarrow$ homog.
$f \neq 0 \rightarrow$ inhom.

n-te Ableitung usw.

Wronski-Det.: $\quad w(x) = \det\begin{pmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x) \\ \vdots & & \\ y_1^{n-1}(x) & \ldots & y_n^{n-1}(x) \end{pmatrix}$

7. Fall von konstanten Koeff.

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x)$$

1. $\boxed{f(x) = 0 \rightarrow \text{Hom. Fall}}$ $\quad y = e^{\lambda x}$ – Lösung

Charakt. Polynom: $\underbrace{(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0)}_{P}e^{\lambda x} \stackrel{!}{=} 0$

1. Nullstellen des charakt. Polynoms.

$\lambda \in \mathbb{R}$	Teil der Lösung
Einfach	$C_1 \cdot e^{\lambda x}$
zweifach	$(C_1 + C_2 x)e^{\lambda x}$
n-Fach	$(C_1 + C_2 x + \ldots + C_n x^{n-1})e^{\lambda x}$

z.B. $(\lambda-1)^2$ $\quad$ mit $\boxed{C_j \in \mathbb{R}}$ $\quad C_j \rightarrow$ reelle Konstant

Paar von komplexen Nullstellen von P $d+ik \mid d-ik$	Teil der Lösung
Einfach	$C_1 e^{dx}\cos(kx) + C_2 e^{dx}\sin(kx)$
zweifach	$(C_1 + C_2 x)e^{dx}\cos(kx) + (C_3 + C_4 x)e^{dx}\sin(kx)$
N-Fach	$(C_1 + C_2 x + \ldots + C_n x^{n-1}) e^{dx}\cos(kx) + (C_{n+1} + C_{n+2}x + \ldots + C_{2n}x^{2n-1})e^{dx}\sin(kx)$

$\boxed{y_{allg} = y_{hom} + y_{inh}}$ $\quad$ kann Konst. vorkommen / nicht.

2. $\boxed{f(x) \neq 0}$ Inhomogene Fall: $\quad y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + y'(x)a_1 + a_0 y(x) = f(x)$

– Inhomogenität der Art: $\boxed{f(x) = A e^{dx}\cos(kx)}$ oder $\sin kx$ oder Kombination von beiden. $\quad A \rightarrow$ Konstante.

• Charakt. Pol. $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$

• Überprüfen ob $\boxed{d+ik}$ eine Nullstelle von $P(\lambda)$ ist.

$d+ik$	Form der Partikulären Lösung y_p
keine NST von $p(\lambda)$	$f(x) = D_1 e^{dx}\cos(kx) + D_2 e^{dx}\sin(kx)$
Einfache Nullstelle	$x f(x)$, $f(x)$ wie oben
Zweifache Nullstelle	$x^2 f(x)$, –''–
n-fache Nullstelle	$x^n f(x)$, $f(x)$ wie oben

$D_1, D_2 \rightarrow$ Konst. zu bestimmen. Wir setzen y_p in der Gleichung $y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots = f(x)$, und durch Koeffizientenvergleich bestimmen D_1, D_2

Transformation : $\boxed{x(t) = e^t}$ $\boxed{u(t) = y(x(t))}$ $\boxed{u(t) = y(e^t)}$

$$\frac{du}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{dx} = e^t \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = e^{-t} \cdot \frac{du}{dt}} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(e^{-t} \cdot \frac{du}{dt}\right) \cdot e^{-t}$$

$$= \left(-e^{-t} \cdot \frac{du}{dt} + e^{-t} \cdot \frac{d^2u}{dt^2}\right) e^{-t} =$$

$$= \boxed{e^{-2t} \cdot \left(\frac{du}{dt} - 1\right) \frac{du}{dt}} \quad \text{usw}$$

$$\Rightarrow \frac{d^ny}{dx^n} = e^{-nt} \cdot \left(\frac{du}{dt} - (n-1)\right)\left(\frac{du}{dt} - (n-2)\right) \cdot \left(\frac{du}{dt} - (n-3)\right) \cdots \left(\frac{du}{dt} - 1\right) \cdot \frac{du}{dt}$$

$$x^n \cdot \frac{d^ny}{dx^n} = e^{nt} e^{-nt} \cdot \ldots \ldots = \left(\frac{du}{dt} - (n-1)\right)(\ldots) \cdot \frac{du}{dt}.$$

$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ Eine Lösung

9. Potenzreihenansatz

DGL: $y''(x) - 2xy'(x) + y(x) = 0$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) a_n x^{n-2} - 2x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Index ändern bei Ableitung

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Durch Vgl.: $\boxed{a_0 + a_2 = 0}$

$$a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$a_0 = -a_2$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n + a_n = 0 \Rightarrow \boxed{a_{n+2} = \frac{a_n(2n-1)}{(n+1)(n+2)}} \ \forall n \geq 1$$

$n = 1 \Rightarrow a_3 = \frac{a_1 \cdot 1}{2 \cdot 3} = \frac{a_1}{6}$

$n = 2 \Rightarrow a_4 = \frac{a_2 \cdot 3}{12} = \frac{-3 \cdot a_0}{12}$

$n = 3 \Rightarrow a_5 = \frac{5 \cdot a_3}{20} = \frac{5a_1}{120} = \frac{1 \cdot 5 a_1}{5!}$

$n = 5 \Rightarrow a_7 = \frac{a_5 \cdot 9}{42} = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot a_1}{7!}$

$$\Rightarrow \boxed{a_{2n+1} = \frac{1 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 9 \cdot \ldots (4n-3) a_1}{(2n+1)!}}$$

diese Terme fasen wir in der Formel zusammen.

$n = 4 \Rightarrow a_6 = \frac{a_4 \cdot 7}{30} = \frac{-3 \cdot 7 \cdot a_0}{12 \cdot 30} = \frac{-3 \cdot 7 \cdot a_0}{360} = \frac{-3 \cdot 7 \cdot a_0}{\frac{6!}{2}}$

$n = 6 \Rightarrow a_8 = \frac{a_6 \cdot 11}{56} = \frac{-3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot a_0}{20 \cdot 160} = \frac{-3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot a_0}{\frac{8!}{2}}$

diese Terme in einer Formel zusammenfassen:

$$a_{2n} = \frac{-1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \ldots (4n-5)}{\frac{(2n)!}{2}} a_0$$

• Abgewandelter Potenzreihenansatz

Form der DGL:

$$\boxed{x^2 y''(x) + xp(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0} \qquad p(x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j x^j$$

$$\boxed{f(s) = s(s-1) + p_0 s + q_0} \text{ Determinierende Gleichung} \qquad q(x) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j x^j$$

s_1 und s_2 Nullstellen von $f(s)$ mit $\boxed{s_1 \geq s_2}$. Falls s_1 und $s_2 \in \mathbb{R}$ für $|x| < R$ oder

$\Rightarrow$ Fundamentalsystem der DGL mit der Gestalt:

$$\boxed{y_1(x) = |x|^{s_1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k} \qquad \boxed{y_2(x) = A \cdot \ln(x) \cdot y_1(x) + |x|^{s_2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} d_k \cdot x^k}$$

1) $\boxed{A = 0,\ c_0 \neq 0,\ d_0 \neq 0}$ falls $s_1 - s_2 \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$

2) $\boxed{A = 1,\ c_0 \neq 0,\ d_0 = 0}$, falls $\boxed{s_1 = s_2}$

3) $A \in \{0, 1\},\ c_0 \neq 0,\ d_0 \neq 0$, falls $\boxed{s_1 - s_2 \in \mathbb{N}}$

$\Rightarrow y_1(x) \to$ berechnen $\Rightarrow y_2(x)$ mit $A = 0$ berechnen falls nicht funktioniert mit $A = 1$ –11–

10. Existenz und Eindeutigkeitssatz von Piccard-Lindelö

$$\left.\begin{array}{l} \vec{y}(t)' = F(t, \vec{y}) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 \end{array}\right\} \text{AWP}$$

F – stetig part. dBar $\Rightarrow$ eindeutig lösbar.

$$\boxed{\vec{y}_{k+1}(t) = \vec{y}_0(t) + \int_{t_0}^{t} F(s, \vec{y}_k(s))\,ds}$$

z.B. $\begin{cases} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -y(t) \\ x(t) \end{pmatrix} \\ \vec{y}' = F\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \vec{y}_0(t) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \vec{y}_1(t) = \vec{y}_0(t) + \int_0^t F(s, \vec{y}_0(s))\,ds$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ds =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \text{ usw.}$$

11. Lineare DGLsysteme

$$\vec{y}'(t) = A(t)\vec{y}(t) + \vec{b}(t)$$

1. Homogene Gleichung

$$\boxed{\vec{y}' = A\vec{y}}$$

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{\phi}_1(t) & \vec{\phi}_2(t) & \vec{\phi}_3(t) \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$\to$ Fundamentalsystem der homogenen Gleichung

$\to$ Lösungen von $\vec{y}' = A\vec{y}$

$$w(t) = \det \phi(t) \neq 0.$$

$\boxed{\phi(t) \cdot \vec{c}} \to$ Lösung von $\vec{y}' = A(t) \cdot \vec{y} \Rightarrow$ durch Variation der konstanten $\Rightarrow \vec{y} = \phi(t) \cdot \vec{c}(t)$

$$\boxed{\vec{y}(t) = \phi(t) \cdot \phi^{-1}(t_0) \cdot \vec{y}_0 + \phi(t) \cdot \int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)\vec{b}(s)\,ds}$$

Allgemeine Lösung der inh. Gl.:

ODER: Spezielle Lösung finden für die inhomogene Gleichung: $\boxed{\vec{y}_p = \phi(t) \cdot \int \phi^{-1}(t) \cdot \vec{b}(t)\,dt}$

z.B. $\int \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \int t\,dt \\ \int 2\,dt \\ \int 1\,dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2/2 \\ 2t \\ t \end{pmatrix}$

Allgemeine Lösung des AWP hat die Form: $\boxed{\vec{y}(t) = \phi(t) \cdot \vec{c} + \vec{y}_p(t)}$ der inhomogenen Gleichung.

um $\vec{c}$ zu bestimmen setzen wir die Anfangswertbedingungen ein $\boxed{\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0}$

12. Fundamentalsysteme lin. DGLsysteme mit c^te koeffizienten

$$A\vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$$

$\vec{y}' = A \cdot \vec{y},\ t \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

$\lambda \to$ E.W. von A und $\vec{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\vec{0}\} \to$ zugehöriger Eigenvektor

$\boxed{\vec{\phi}(t) = e^{\lambda t} \cdot \vec{v}} \to$ Lösung von $\vec{y}' = A\vec{y}$

wenn nur die Terme c_{2n} existieren $\Rightarrow$

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} \cdot x^{2n+\frac{1}{2}} \Rightarrow \text{statt } n \to 2n.$$

Falls $\boxed{s_1 \notin \mathbb{R}} \Rightarrow \boxed{s_2 = \overline{s_1}}$, Fundamentalsystem der DGL mit $\boxed{y_1(x) = \mathrm{Re}(|x|^{s_1} \cdot v_1(x))}$ und

$$\boxed{y_2(x) = \mathrm{Im}(|x|^{s_1} \cdot v_1(x))}$$

$v_1(x) \to$ Potenzreihe mit $v_1(0) \neq 0$, für $|x| < R$.

$c_{-2} = c_{-1} = 0 \qquad 0 \cdot c_0 = 0 \Rightarrow c_0 \to$ frei gewählt

$\to$ Ansatz berücksichtigen

$$y_1(x) = x^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$x \cdot y_1'(x) = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \tfrac{1}{2}\right) c_n x^{n-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \tfrac{1}{2}\right) \cdot c_n \cdot x^{n+\frac{1}{2}}$$

nicht ändern Grenzen

Falls $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ und $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, $\vec v\in\mathbb{C}^n\setminus\mathbb{R}^n$ mit $A\vec v=\lambda\cdot\vec v$ ⇒ Die Lösungen $e^{\lambda t}\vec v$ und $e^{\bar\lambda t}\vec v$ durch $\mathrm{Re}\{e^{\lambda t}\vec v\}$ und $\mathrm{Im}\{e^{\lambda t}\vec v\}$ ersetzt.

Real und Imaginärteil.

z.B. $\vec y' = \begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\vec y$.

1. Schritt: E.W. und E.V. ⇒ $\det(A-\lambda I)\overset{!}{=}0$

komplexes Paar $\boxed{\lambda_1=1+i}$ $\boxed{\lambda_2=1-i}$

E.V. $\vec v$ von $\boxed{1+i}$ ⇒ $A\cdot\vec v=\lambda\vec v \Rightarrow (A-\lambda I)\vec v=0$

kern$(A-\lambda I)$ ⇒ $\begin{pmatrix}-i&1\\-1&-i\end{pmatrix}\vec v=0 \Leftrightarrow \vec v=\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$

$\mathrm{Re}\left\{e^{(1+i)t}\cdot\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\right\}$ und $\mathrm{Im}\left\{e^{(1+i)t}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\right\}$ Fundamentalsystem.

$$e^t(\cos t+i\sin t)\cdot\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^t\cos t+i\, e^t\sin t\\ -e^t\sin t + i\, e^t\cos t\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}e^t\cos t\\-e^t\sin t\end{pmatrix}}_{\text{Realteil}} + \underbrace{i\cdot\begin{pmatrix}e^t\sin t\\e^t\cos t\end{pmatrix}}_{\text{Imaginärteil}}$$

$$\underbrace{\vec\phi_2(t)=\begin{pmatrix}e^t\cos t\\-e^t\sin t\end{pmatrix};\ \vec\phi_3(t)=\begin{pmatrix}e^t\sin t\\e^t\cos t\end{pmatrix}}_{\text{2 Reelle Lösungen.}}$$

ein Fundamentalsyst. von $\vec y'=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\vec y$

$\boxed{A^0=I}$ A hoch Null = Einheitsmatrix.

• $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ und $\lambda_0\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ ⇒ $\bar\lambda_0$ → EW der alg. Vielfachheit m. Für das Paar $\lambda_0,\bar\lambda_0$ Lösungen $\mathrm{Re}\{\vec\phi_j(t)\}$, $\mathrm{Im}\{\vec\phi_j(t)\}$ → 2m lin. unabhängige

- Exponentialmatrixfunktion

$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$

$$\exp(t\cdot A)=e^{t\cdot A}=\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(tA)^\ell}{\ell!}=\lim_{N\to\infty}\sum_{\ell=0}^{N}\frac{(tA)^\ell}{\ell!}$$

Reihe konvergiert.

z.B. $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ $A^2=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=(-1)\cdot I$

$A^{2k}=(A^2)^k=(-1I)^k=(-1)^k\cdot I^k=(-1)^k\cdot I$.

$A^{2k+1}=(A^2)^k\cdot A=(-1)^k I\cdot A=(-1)^k\cdot A$ $\forall k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

$$e^{tA}=\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(tA)^\ell}{\ell!}=\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{t^{2\ell}A^{2\ell}}{(2\ell)!}+\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(tA)^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!}=$$

$$=I\cdot\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^\ell t^{2\ell}}{(2\ell)!}+A\cdot\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^\ell t^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!}=$$

$$=I\cdot\cos t+A\cdot\sin(t).$$

Lösung von AWP: $\vec y'=A\vec y$, $\vec y(0)=\vec y_0$

⇒ $\boxed{\vec\phi(t)=e^{tA}\cdot\vec y_0}$ ⇒ $e^{tA}=\vec\phi(t)\cdot\phi^{-1}(0)$

Allgemeine Lösung von $\vec y'=A\vec y$ gegeben durch $e^{tA}\vec c$

Im Fall $\phi(t)=e^{At}$ ⇒

$$\boxed{\vec y(t)=e^{At}\cdot\vec y(0)+e^{At}\cdot\int_0^t e^{-As}\,\vec b(s)\,ds}\quad \vec y(t)$$

$\vec y'=A\cdot\vec y$, $t\in\mathbb{R}$, $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ → nicht diagonalisierbar. | λ_0 → E.W. der alg. Vielfachheit m, m-fache Nullstelle des charakt. Polynoms

Basis von kern$(A-\lambda I)^m$ bestimmen → immer Dimension m

$$\boxed{\vec\phi_j(t)=e^{\lambda_0 t}\cdot\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}(A-\lambda_0 I)^k\cdot\vec v_j}$$

z.B. $\boxed{\lambda_1=1}$ mit alg. Vielfachheit = 2.

Kern$(A-\lambda_1 I)$ = Lin$\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}=:\vec v$ $\vec\phi_1(t)=e^t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

Wir ergänzen den gefundenen Eigenvektor zu einer Basis von kern$(A-I)^2$ da $\lambda=1$

$(A-I)^2\cdot\vec u=0$ wir wissen, dass $(A-I)\cdot\vec v=0$

$(A-I)\cdot(A-I)\cdot\vec u=0$

$(A-I)\cdot\vec v=0$ ⇒ $\boxed{(A-I)\cdot\vec u=\vec v=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}$

um Basis von kern$(A-I)$ zu Basis von kern$(A-I)^2$ zu erweitern.

Wir finden $\vec u=t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}$ → "neuer Vektor"

$$\vec\phi_2(t)=e^t\cdot\sum_{k=0}^{1}\frac{t^k}{k!}\cdot(A-I)^k\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=e^t\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+t(A-I)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

• $A,D\in\mathbb{C}^{n\times n}$ ähnlich wenn $\exists S\in\mathbb{C}^{n\times n}$ mit $\boxed{D=S^{-1}\cdot A\cdot S}$ ⇔ $\boxed{A=SDS^{-1}}$

wenn D = Diagonalmatrix ⇒ A diagonalisierbar → ähnlich zu einer diagonalen Matrix.

$S=(\vec S_1,\dots,\vec S_n)$ mit $\vec S_1,\vec S_n$ → E.V von A.

⇒ $\boxed{D=S^{-1}\cdot A\cdot S}$ $D=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$ mit a,b EW von A

$A^2=(SDS^{-1})^2=(SD\underbrace{S^{-1})(S}_{I}DS^{-1})=SD^2S^{-1}$

⇒ $\boxed{A^k=S\cdot D^k S^{-1}}$

$$e^{tA}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tA)^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k S D^k S^{-1}}{k!}=S\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tD)^k}{k!}\cdot S^{-1}$$

⇒ $\boxed{e^{tA}=S\cdot e^{tD}\cdot S^{-1}}$

Lin. Transportgleich.

$\begin{cases}u_t+vu_x=g(x,t);\ u=u(x,t)\\ u(x,0)=f(x)\end{cases}$ $v\in\mathbb{R}$, $g\in C(\mathbb{R}^2)$, $f\in C^1$

$g=0$ ⇒ $\begin{pmatrix}v\\1\end{pmatrix}\cdot\nabla u=\frac{\partial u}{\partial\begin{pmatrix}v\\1\end{pmatrix}}=0$ → Richtungsableitung von u in Richtung $\begin{pmatrix}v\\1\end{pmatrix}$.

⇒ u konst auf Geraden: $\begin{pmatrix}x\\t\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}v\\1\end{pmatrix}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

$g\neq0$; $\xi=x-vt$.

$u(x,t)=w(\xi,t)=u(\xi+vt,t)$ | $u_t+vu_x=w_t$

$w(\xi,t)=w(\xi,0)+\int_0^t w_t(\xi,s)\,ds$ | $w(\xi,0)=f(\xi)$

$$u(x,t)=f(x-vt)+\int_0^t g(x-vt+vs,s)\,ds$$

$$\begin{cases} \partial_t u + \vec{v}\cdot\nabla u = g(\vec{x},t) \\ u(\vec{x},0) = f(\vec{x}) \end{cases}$$

Lösung: $u(\vec{x},t) = f(\vec{x}-\vec{v}t) + \int_0^t g(\vec{x}-\vec{v}t+\vec{v}s, s)\,ds$

- Quasilineare Gleichungen erster Ordnung

$\boxed{\vec{a}(\vec{x},u)\cdot\nabla u = b(\vec{x},u)}$, $\vec{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$

I = Intervall

$\vec{a}: D\times I \to \mathbb{R}^n$, $b: D\times I \to \mathbb{R}$

$\vec{x} = \binom{x}{t} \Rightarrow u(x,t)$

Wir suchen Lösungen auf Kurve $s \to \vec{k}(s)$

$w(s) = u(\vec{k}(s)) = u(k_1(s), k_2(s))$

$w'(s) = \vec{k}'(s)\cdot\nabla u(\vec{k}(s)) = \begin{pmatrix} k_1'(s) \\ k_2'(s) \end{pmatrix}\cdot\nabla u(\vec{k}(s))$

$\Rightarrow \boxed{\vec{k}'(s) = \begin{pmatrix} k_1'(s) \\ k_2'(s) \end{pmatrix} = \vec{a}(k_1(s), k_2(s), w(s))}$

$\Rightarrow \boxed{w'(s) = b(k_1(s), k_2(s), w(s))}$

$\begin{pmatrix} \vec{k}(s) \\ w(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(s) \\ t(s) \\ w(s) \end{pmatrix} \to$ Charakteristik

$\vec{k}(s) = \begin{pmatrix} k_1(s) \\ k_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(s) \\ t(s) \end{pmatrix} \to$ Grundcharakteristik.

falls $x = f(\xi)\cdot t + \xi$

$\Rightarrow u(x,t) = f(\xi) = u(\xi,0)$

$k_1(0) = \xi$, $k_2(0) = 0$.

$\vec{k}^{(c_1,c_2)}(s) \Rightarrow c_1, c_2$ Konstanten.

≠ Grundcharakt. schneiden sich nicht.

Grundch. läuft nach Q hinein $\Rightarrow \boxed{\vec{k}(t_0+h) \in Q}$

- Potentialgleichung $\boxed{\Delta V = -\rho}$

$\Delta V = 0$ in $\Omega \Rightarrow V \to$ harmonisch in Ω.

$\to$ Laplace Gleich.

$\Delta V = f \to$ Poissonglei / Potentialgl.

$$\Gamma(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\ln\|\vec{x}\|, & n=2 \\ -\frac{1}{4\pi}\|\vec{x}\|^{-1}, & n=3 \end{cases}$$

Grund / Fundamentallösun der Laplacegleichung.

Potential erzeugt durch Ladungsdichte $(-f)$

$\boxed{u(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^n}\Gamma(\vec{x}-\vec{y})f(\vec{y})\,d\vec{y}}$

$\begin{cases} \Delta V = f & \text{in } \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \\ V = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{V(\vec{x}) = \int_\Omega G(\vec{x},\vec{y})f(\vec{y})\,d\vec{y}}$ Greensche-Fkt.

$G(\vec{x},\vec{y}) = G(\vec{y},\vec{x})$ und $G(\vec{x},\vec{y}) = 0$ wenn $\vec{x},\vec{y} \in \partial\Omega$

$h(\vec{x},\vec{y}) = G(-\|-) - \Gamma(-\|-) =$ harmonisch.

Allgemeines Problem.

$\begin{cases} \Delta V = f & \text{in } \Omega \\ V = \varphi & \text{in } \partial\Omega \end{cases} \Rightarrow V(\vec{x}) = \iiint_\Omega G(\vec{x},\vec{y})f(\vec{y})\,d\vec{y} +$

$\iint_{\partial\Omega}\frac{\partial G}{\partial N_{\vec{y}}}(x,\vec{y})\,\varphi(\vec{y})\,do(\vec{y}) \to$ Richtungsableitung.

- Wärmeleitungsgleichung: $u(\vec{x},t)$, $t \in \mathbb{R}$

$=$ Temp.verteil. $\vec{x} \in \Omega$

$\boxed{\partial_t u = c\cdot\Delta u}$, $t > 0$, $c > 0$

Grundlösung von $\partial_t u = \Delta u \Rightarrow \boxed{G(\vec{x},t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}}\cdot e^{-\frac{\|\vec{x}\|^2}{4t}}}$

$u(\vec{x},t) = \int_{\mathbb{R}^n} G_n(\vec{x}-\vec{y},t)\,f(\vec{y})\,dy + \int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} G_n(\vec{x}-\vec{y},t-r)\,g(\vec{y},r)\,d\vec{y}\,dr$

$\begin{cases} u_t(\vec{x},t) = \Delta u(\vec{x},t) + g(\vec{x},t) \to \text{Quelle} \\ u(\vec{x},0) = f(\vec{x}) \end{cases}$

- Separation der Variablen

• Partielle DGL lösen: $\boxed{u(x,t) = f(x)g(t)}$

z.B. $\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = d$, $d \in \mathbb{R}$.

3 Fälle betrachten:

1. $\boxed{d>0}$
2. $\boxed{d<0}$
3. $\boxed{d=0}$

Triviale Lösung $u(x,t) = 0$ ausschließen.

z.B. $\partial_{tt}u(t,x) = \partial_{xx}u$

$(t,x) \in \mathbb{R}\times(-\pi,\pi)$ $\boxed{u(t,x) = v(t)\cdot w(x)}$

$u(t,\pi) = u(t,-\pi)$ $t \in \mathbb{R}$

$\partial_x u(t,\pi) = \partial_x u(t,-\pi)$

$u(0,x) = f(x)$ $x \in [-\pi,\pi]$

$\partial_t u(0,x) = g(x)$

$\frac{v''(t)}{v(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)} = d$

① $d = 0 \Rightarrow v(t) = at+b$; $w(x) = dx + c$

$u(t,\pi) = v(t)\cdot w(\pi) = u(t,-\pi) = v(t)w(-\pi) \Rightarrow \boxed{w(x) = c}$

da $v(t) \neq 0 \to$ Triv. Lösung 0 ausschließen

② $\boxed{d>0} \Rightarrow \boxed{w(x) = 0} \to$ ausschließen.

③ $\boxed{d<0} \Rightarrow 2c_2\sin(\sqrt{-d}\,\pi) = 0$; damit wir eine Lösung bekommen $\Rightarrow$ muss $\boxed{\sin(\sqrt{-d}\,\pi) \overset{!}{=} 0}$, so c_2 kann freigewählt werden. $\Rightarrow \boxed{\sqrt{-d} = k \in \mathbb{N}}$

$\Rightarrow w(x) = c_1\cos(kx) + c_2\sin(kx)$

$v(t) = c_3\cos(kt) + c_4\sin(kt)$

Konstant $A, B, C, \ldots \in \mathbb{R}$

$u(t,x) = w(x)\cdot v(t) = act + bc = Bt + D$ $\boxed{d=0}$

$u(t,x) = A\cos(kx)\cos(kt) + \ldots + D\sin(kx)\sin(kt)$ $\boxed{d<0}$

• f genau dann holomorph, wenn $u, v \in C^1$ und die Cauchy-Riemannschen Formeln gelten: $\boxed{f = u+iv}$

$u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0)$

$u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0)$

$u(0,x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$

$\partial_t u(0,x) = Ck\cos(kx) + Dk\sin(kx)$

$\boxed{f(x) = \sin x}$; $\boxed{g(x) = \cos x}$ $\to$ frei wählen

2π-Per. Fkt.

Durch Koeff. Vgl. A, B, C, D, k bestimmen.

$\Rightarrow u(t,x) = \cos t\sin x + \sin t\cos x$.

Allgemeine Lösung: $\sqrt{-d} = k \Rightarrow d = -k^2 < 0$

$u(t,x) = \underbrace{B_0t + D_0}_{\text{Lösung für } d=0} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos(kt)\ldots + \ldots + D\sin(kx)\sin(kt))}_{\text{Lösung für } d<0}$

a_k, b_k Folgen

$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin kx)$ und so g (*)

$\shortparallel$

$u(0,x) = D_0 + \sum_{k=1}^{\infty}A_k\cos kx + \ldots$

durch Vgl. A_k, B_k, C_k, D_k, B_0, D_0 bestimmen.

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$	$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{(2n)!}$
$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$
$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$	$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot x^n}{n}$	$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

$z^n = r\cdot e^{i\varphi}$

$\Rightarrow z = r^{\frac{1}{n}}\cdot e^{\frac{i(2\pi k+\varphi)}{n}}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$