Deg	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
Rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

DGL mit veränderlichen Konstanten

Form: $y'(t) = f(t) \cdot g(y(t))$, $y(t_0) = y_0$

① Schreibe y' als $\frac{dy}{dt}$ ② Bringe alle gleichen Variablen auf eine Seite ③ Integriere beide Seiten (bei gegebenem AWP mit eingesetzten Grenzen) ④ Löse die Gleichung nach $y(t)$ auf $\Rightarrow$ wir suchen dann den größte Intervall mit $y_0 \in I$, ~~auf~~ dem y die eindeutige Lösung vom AWP ist.

Determinante

Matrizen:

$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

$(k \cdot A)^{-1} = k^{-1} \cdot A^{-1}$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Bernoulli DGL

Es gilt: $g, h: I \to \mathbb{R}$ stetig, $\alpha \notin \{0,1\}$, $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$ $(y(x_0) = y_0)$, $y_0 > 0$ für $\alpha \notin \mathbb{Z}$

Form: $y'(t) + g(x) \cdot y + h(x) \cdot y^{\alpha} = 0$

Lösung: ① Alles mit $(1-\alpha) \cdot y^{-\alpha}$ multiplizieren

② Substituieren: $z := y^{1-\alpha}$

③ " $z' := (1-\alpha) \cdot y^{-\alpha} \cdot y'$

④ es folgt:

DGL 1. Ordnung $\rightarrow$ $z'(x) = (\alpha - 1) \cdot g(x) \cdot z(x) + (\alpha - 1) \cdot h(x)$

Lineare DGL 1. Ordnung

Form: $y'(t) = g(t) \cdot y + h(t)$ | mit $y(t_0) = y_0$

Lösung mit Anfangswertproblem:

$$y(t) = y_0 \cdot e^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} \cdot h(s)\, ds$$

$\Rightarrow$ es kommen keine Konstanten dazu.

Lösung ohne Anfangswertproblem:

$$y(t) = c \cdot e^{A(t)} \cdot \underbrace{\int e^{-A(s)} \cdot h(s)\, ds}_{\text{erhält ebenfalls Konstante}}$$

Es gilt: $A(t) = \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds$ (mit AWP)

& $A(t) = \int g(s)\, ds$ (ohne AWP. Zudem kommt Konstante dazu)

Ricatti DGL

$y' = f(x) \cdot y + g(x) \cdot y^2 + h(x)$

Gegeben: $u \to$ eine Lösung der Ricatti DGL (nicht allgemeine)

Gesucht: $v \to$ eine allgemeine Lösung aus der folgt:

Ansatz: $y = u + \frac{1}{v} \iff y' = u' - \frac{v'}{v^2}$ (Wichtig: $v \neq 0$ $\forall$ Lösungen v)

$\Rightarrow$ nach Umformung folgt:

$$v' = \underbrace{[-2 \cdot u \cdot g(x) - f(x)]}_{\text{bekannte Funktion}} \cdot v - g(x) \Leftrightarrow \text{(lineare DGL 1. Ordnung)}$$

zum Schluss $v(x)$ in $y = u + \frac{1}{v}$ einsetzen.

Reduktionsverfahren von d'Alembert

Form: $y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = f(x)$

mit $p, q, f: I \to \mathbb{R}$, stetig und $x_0 \in I$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\to y(x_0) = \alpha$, $y'(x_0) = \beta$

Verfahren:

Gegeben: $y_1 \neq 0$ und Lösung der homogenen DGL $(y'' + p(x) y' + q(x) \cdot y = 0)$

Ansatz: $y(x) = v(x) \cdot y_1(x)$:

$$\Rightarrow v'' + v' \left[\frac{2 y_1'(x)}{y_1(x)} + p(x)\right] = \frac{f(x)}{y_1(x)}$$

Substituiere: $w = v'$, dann:

$$\Rightarrow w' + w \left[\frac{2 y_1'(x)}{y_1(x)} + p(x)\right] = \frac{f(x)}{y_1(x)}$$

$\to$ dies ist lineare DGL. 1. Ordnung.

haben wir $w(x)$ gefunden, so gilt:

$\to v(x) = \int w(x)\, dx + c$ } AWP lösen

$\to y(x) = v(x) \cdot y_1(x)$ } durch x_0, α, β

Euler DGL

Form:

$$a_4 \cdot x^4 \cdot y^{(4)} + a_3 \cdot x^3 \cdot y''' + a_2 \cdot x^2 \cdot y'' + a_1 \cdot x \cdot y' + a_0 \cdot y = f(x)$$

setze nun für $f(x) \hat{=} f(e^t)$ (Substitution um:

$e^t = x \iff t = \ln(x)$ $\Rightarrow$ rechter Teil wird zu $f(e^t)$

nach Euler wird der linke Teil zu:

$$a_4 \cdot u^{(4)}(t) + (-6a_4 + a_3) u'''(t) + (11 a_4 - 3 a_3 + a_2) u''(t) + (-6 a_4 + 2 a_3 - a_2 + a_1) u'(t) + a_0 u(t) = f(e^t)$$

$\Rightarrow$ Dies ist Lineare DGL höherer Ordnung mit konst. Koeffi.

$\to$ zudem evtl. noch partikuläre Lösung.

$\to$ Lösung für $u(t)$ finden und resubstituieren:

$$u(\ln(x)) \stackrel{!}{=} y(x)$$

Potenzreihenansatz mit AWP:

$y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$ es gilt $a_0 = y_0$, $a_1 = y_1$

Wichtig: ist $x_0 \neq 0$, so ist es einfacher die Potenzreihe von p, q, f und y um x_0 zu entwickeln, da dann $a_0 = y_0$, $a_1 = y_1$ [d.h. $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$

Potenzreihenansatz

Form: $y'' + p(x) y' + q(x) \cdot y = f(x)$

$\to p, q, f$ sind durch Potenzreihen darstellbar. Wir machen den

ANSATZ: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$

$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1}$

$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (n-1) \cdot n \cdot x^{n-2}$

① Verschieben der Reihen, sodass alle x^n haben und alle $\sum_{n=0}^{\infty} (\dots) x^n$.

② wenn $f \neq 0$ $\to$ bilden der Reihe von $f(x)$ sodass $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dots x^n$ (z.B. wenn $f(x) = e^x \iff \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

③ umformen nach a_{n+2} (oder dem höchsten $a_{n+\dots}$ $\Rightarrow$ Rekursionsformel

④ Koeffizienten beweisen mithilfe vollständiger Induktion (hierfür ist eine Formel gegeben

⑤ Angeben der Lösung, wobei a_n die bewiesene Formel ist (aus Induktion). Nun umformen der Reihe, sodass sie wieder als Funktion darstellbar ist.

DGL höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Form: $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = f(x)$

→ wichtig: a_i $\forall i \in \mathbb{N}$ sind konstant.

① Lösung der homogenen ($f(x) = 0$)

Ansatz: $y = e^{\lambda t}$ daraus folgt nach einsetzen

$$\Rightarrow \underbrace{(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot \lambda + a_0)}_{\text{charakteristisches Polynom} \hat{=} cp} \cdot e^{\lambda t} \overset{!}{=} 0$$

Für verschiedene Nullstellen λ_i ergeben sich folgende Lösung:

$\lambda \in \mathbb{R}$ ist eine... Nullstelle von p	(Teil der) Lösung der DGL
... einfache ...	$c_1 \cdot e^{\lambda t}$
... zweifache ...	$c_1 \cdot e^{\lambda t} + c_2 \cdot t \cdot e^{\lambda t}$
... n-fache ...	$c_1 \cdot e^{\lambda t} + c_2 \cdot t \cdot e^{\lambda t} + \ldots + c_n t^{n-1} \cdot e^{\lambda t}$

WICHTIG: Existieren mehrere Nullstellen so (z.B. 2 mit λ_1, λ_2 einfache Nullstelle): $y(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}$

ist $\lambda \in \mathbb{C}$ so folgt:

$\lambda \in \mathbb{C}$, Nullstelle von cp mit $\lambda = d + iK / d - iK$	(Teil der) Lösung der DGL
einfache Nullstelle	$c_1 \cdot e^{dt} \cdot \cos(Kt) + e^{dt} \cdot \sin(Kt) \cdot c_2$
zweifache Nullstelle	$(c_1 + c_2 t) \cdot e^{dt} \cdot \cos(Kt) + (c_3 + c_4 \cdot t) \cdot e^{dt} \cdot \sin(Kt)$

② Lösung der inhomogenen ($f(x) \neq 0$)

① Lösung der homogenen DGL finden ($y_h(x)$)

② Partikuläre Lösung finden (oder gegeben) [$y_p(x)$]

③ $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

Partikuläre Lösung finden

Wenn der inhomogene Teil $f(t)$ wie folgt aussieht:

$f(t) = g(t) \cdot e^{dt} \cdot \cos(Kt)$ / $f(t) = q(t) \cdot e^{dt} \cdot \sin(Kt)$

→ $q(t)$ ist Polynom vom Grad m; ist $m = 0$, so $q(t) = \text{const.}$

Ist nun cp das charakteristische Polynom von der homogenen DGL, so gilt:

$d + iK$ ...	$y_p = \ldots$
... ist keine Nullstelle von cp	$r_1(t) \cdot e^{dt} \cdot \cos(Kt) + r_2(t) \cdot e^{dt} \cdot \sin(Kt) =: g(x)$
... ist einfache Nullstelle von cp	$t \cdot g(t)$
... ist n-fache Nullstelle von cp	$t^n \cdot g(t)$

Hierbei sind $r_1(t)$, $r_2(t)$ Polynome vom Grad m, welche zu bestimmen sind, in dem y_p in die inhomogene DGL eingesetzt wird. Ist z.B. $m = 1$, so: $r_1(t) = c_1 t + c_2$, $r_2(t) = c_3 t + c_4$.

sieht $f(t)$ folgendermaßen aus:

$$f(t) = q_1(t) \cdot e^{d_1 t} \cdot \cos(k_1 t) + q_2(t) \cdot e^{d_2 t} \cdot \cos(k_2 t) = f_1(t) + f_2(t)$$

So muss man y_{p1} von $f_1(t)$ und y_{p2} von $f_2(t)$ finden

und $y_p(t) = y_{p1}(t) + y_{p2}(t)$

---

mit $x > 0$ wobei: $p(x) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j x^j$, $q(x) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j \cdot x^j$ [$|x| < R$]

Ansatz: $y(x) = x^\lambda \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^{n+\lambda}$

$$\Rightarrow y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) a_n \cdot x^{n+\lambda-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1) \cdot a_n \cdot x^{n+\lambda-2}$$

Eingesetzt in die DGL ergibt sich:

$$0 = a_0 \cdot x^\lambda (\lambda(\lambda-1) + p_0 \cdot \lambda + q_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left([(n+\lambda)(n+\lambda-1) + p_0 (n+\lambda)] a_n + a_{n-1} \right) x^{n+\lambda}$$

Damit die gesamte DGL $= 0$ und da a_0 & $x^\lambda \neq 0$ gilt / muss gelten: $\lambda(\lambda-1) + p_0 \lambda + q_0 = 0$ → Nullstellen hiervon heißen λ_1, λ_2 mit $\lambda_1 > \lambda_2$. Nun gilt: $y_1(x) = |x|^{\lambda_1} \cdot \sum_{K=0}^{\infty} c_K \cdot x^K$

$y_2(x) = A \cdot \ln|x| \cdot y_1(x) + |x|^{\lambda_2} \cdot \sum_{K=0}^{\infty} d_K \cdot x^K$ für A gilt hier:

$$A = \begin{cases} A = 0,\ c_0 \neq 0,\ d_0 \neq 0 & \rightarrow \lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{N} \cup \{0\} \\ A = 1,\ c_0 \neq 0,\ d_0 = 0 & \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \\ A \in \{0, 1\},\ c_0 \neq 0,\ d_0 \neq 0 & \rightarrow \lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

→ Zuerst $A = 0$ probieren (leichter), wenn es klappt war es richtig. Wenn es nicht klappt, $A = 1$ probieren.

NUN: Mit Hilfe von $K \geq 1$ (rot unterstrichene Formel) c_K und d_K berechnen: Hierfür vollständige Induktion für c_K & d_K

① Aufstellen einer Rekursionsformel für $K = 1$, hierfür ein $c_0 \neq 0$ und $d_0 \neq 0$ wählen

② „1-3" mal einsetzen $d_{1,2,3 \ldots}$ und Induktionsformel ableiten

③ diese für $n+1$ beweisen, wobei bei IA der gewählte Startwert in ①

④ c_n & d_n -Formel in $y_1(x)$ & $y_2(x)$ einsetzen und auflösen der Reihe, sodass die Reihe wieder als Funktion darstellbar ist.

Picard-Lindelöf

$D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $F: D \to \mathbb{R}^n$ stetig bezüglich aller bis auf der ersten Variablen stetig partiell differenzierbar $(x_0, y_0) \in D$. Dann ist: $\vec{y}' = F(x, \vec{y})$, $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$ eindeutig lösbar auf $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $x_0 \in I$.

Auf einer möglicherweise kleineren Umgebung $J = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ mit $\delta > 0$ von x_0 konvergiert die Fixpunktiteration. $\vec{y}_0(x) = \vec{y}_0$;

$$\boxed{\vec{y}_{K+1}(x) = \vec{y}_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, y_K(t))\, dt}$$

für $x \in J$ gleichmäßig gegen die Lösung.

Wronski-Determinante

$$w(x) = \left| \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & & & \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \right|$$

Satz: Ist die Wronskideterminante an mindestens einer Stelle im Intervall I ungleich Null, so ist die Funktion linear unabhängig bzw. die Funktionen in den Einträgen sind linear unabhängig. Genau dann bilden sie ein Fundamentalsystem. ACHTUNG: wenn $w(x) = 0$ $\forall x \in I$, dann hat die Wronskideterminante keine Aussagekraft und man weiß nicht ob es sich um ein Fundamentalsystem handelt.

Komplexe Zahlen

$z = a + bi$ (Normalform), Polarform: $z = |z| (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$

Argument:

$\cos(\varphi) = \frac{a}{|z|}$

$\sin(\varphi) = \frac{b}{|z|}$

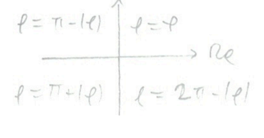
$\tan(\varphi) = \frac{b}{a}$

$z^n = a + bi \rightarrow z^n = r \cdot e^{i\varphi} \Rightarrow z_k = r^{1/n} \cdot e^{i\left(\frac{2\pi k + \varphi}{n}\right)}$

für $k = (0, 1, \ldots, n-1)$

Eulerform:

$z = |z| \cdot e^{i\varphi}$



Lineare DGS mit konstanten Koeffizienten

① Homogener Fall: $\vec{y}'(x) = A \cdot \vec{y}(x)$

i) A ~~ist~~ diagonalisierbar ➜ Die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und die Eigenvektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ ermitteln. Dann ist die Lösung: $\vec{y}(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x}\vec{v}_1 + \dots + c_n \cdot e^{\lambda_n \cdot x} \cdot \vec{v}_2$ mit $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$. Für reelle A sind $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ und wir ersetzen $e^{\lambda_j x} v_j / e^{\bar{\lambda}_j x} \bar{v}_j$ durch den Real- und Imaginärteil von $e^{\lambda_j x} \cdot \vec{v}_j$, falls $\lambda_j \in \mathbb{C}$.

ii) A ist nicht diagonalisierbar ⇒ Ist λ Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit m (d.h. m-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms), so muss man falls $\mathrm{Kern}(A-\lambda I) \neq m$ Vektoren: $\mathrm{Kern}\{(A-\lambda I)^m\}$. Hierbei kommt ein neuer Vektor $\vec{v}_{neu}$. um auf den letztendlichen Vektor zu kommen gilt für diesen:

$\vec{v}_{final} = \vec{v}_{neu} + t(A-\lambda I) \cdot \vec{v}_{neu}$. Alternativ geht auch: $(A-\lambda \cdot I) \cdot \vec{v}_{neu} = \vec{v}$. $\vec{v}_{final} = \vec{v}_{neu} + t \cdot \vec{v}$

$\rightarrow e^{2ix} = \cos(2x) + i\sin(2x)$

Nun suchen wir das Fundamentalsystem $\Phi(x)$. Elemente von diesem sind $\phi_j(x) = e^{\lambda_j}\vec{v}_j$ die Elemente, wobei man wenn $\lambda_j \in \mathbb{C}$ direkt zwei ϕ bekommt, da dann: $\phi_1 = \mathrm{Re}\{e^{\lambda_j}\vec{v}_j\}$ & $\phi_2 = \mathrm{Im}\{e^{\lambda_j} \cdot \vec{v}_j\}$. Hatte man zu Anfang $A^{n\times n}$ so braucht man n-~~viele~~ verschiedene ϕ.

Das Fundamentalsystem lautet nun: $\Phi(x) = (\phi_1(x) \dots \vec{\phi}_n(x))$

Mit $e^{At} = \Phi(t) \cdot \Phi(0)^{-1}$ kann man $\vec{y}'(x) = A \cdot \vec{y}(x)$ lösen.

allgemeine Lösung: $\Phi(t) \cdot \vec{C}$

$\vec{y}(x) = \vec{y}_0 \cdot \Phi(x)$

② Inhomogener Fall: $\vec{y}'(x) = A \cdot \vec{y}(x) + \vec{b}(x)$

Ist $\Phi(x) = (\phi_1(x) \dots \phi_n(x))$ das Fundamentalsystem der homogenen so gilt:

$$\vec{y}(x) = \Phi(x) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + \Phi(x) \cdot \int \Phi(x)^{-1} \cdot \vec{b}(x)\,dx$$

③ Anfangswertproblem: $\vec{y}'(x) = A \cdot \vec{y}(x) + \vec{b}(x)$, $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$

Bestimmen von $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ durch einsetzen von $x = x_0$

oder: $\vec{y}(x) = \Phi(x) \cdot \Phi(x_0)^{-1} \cdot \vec{y}_0 + \Phi(x)\int_{x_0}^{x} \Phi(x)^{-1} \cdot \vec{b}(x)\,dx$

eine weitere Alternative ist:

$$\vec{y}(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot \vec{y}_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} \cdot \vec{b}(s)\,ds$$

$(t-t_0)A$ ↳ wie e^{tA} nur für t einfach t−s einsetzen

Matrix-Exponentialfunktion

1.) $e^{t \cdot A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n \cdot t^n}{n!}$

2.) $e^{tA} = \underbrace{\Phi(t)}_{S^{-1} e^{D}} \cdot \underbrace{\Phi(0)^{-1}}_{S}$

3.) $e^{tA} = S^{-1} \cdot e^{tD} \cdot S$, falls $A = S^{-1} \cdot D \cdot S$

Wenn: $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \lambda_2 & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$

gilt:

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & e^{t\lambda_2} & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{t \cdot \lambda_n} \end{pmatrix}$$

Lineare Transportgleichungen mit konstanten Koeffizienten

gegeben sei: $g \in C(\mathbb{R}^2)$, $f \in C^1(\mathbb{R})$, $v \in \mathbb{R}$ | gesucht: $u = u(x,t)$

Form: $\begin{cases} u_t + v u_x = g(x,t) & (1) \\ u(x,0) = f(x) & (2) \end{cases}$

① homogener Fall ($g(x,t) = 0$)

$0 = u_t + v u_x$ (wichtig v vor Ableitung der 1. Variable von $u(x,t)$)

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_t \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \nabla u = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix}} = 0$. Sei nun:

$K(s) = \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix}$ und $w(s) := u(K(s))$ ≙ konstant

Da $w(s)$ konstant $\forall s \in \mathbb{R}$ folgt:

$u(K(0)) = u(K(s))$ daraus folgt:

➜ $u(x,t) = u(x+sv, t+s)$. Damit die Randbedingung $u(x,0) = f(x)$ erfüllt ist, muss gelten $s \overset{!}{=} -t$.

Somit folgt:

$u(x,t) = u(x - t \cdot v, 0) \overset{(1)}{=} f(x - tv)$

Lösung des homogenen AWP:

$u(x,t) = f(x - tv)$

② inhomogener Fall ($g(x,t) \neq 0$)

$u_t + v u_x = g(x,t)$ (1) $\Leftrightarrow$

$\begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_t \end{pmatrix} = g(x,t) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \nabla u = g(x,t)$

$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix}} = g(x,t)$. Sei wieder

$w(s) = u(K(s))$, dann $w'(s) = \frac{\partial u}{\partial \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix}}(x+sv, t+s)$

dies ist nach Kettenregel wiederum:

$v u_x(x+sv, t+s) + u_t(x+sv, t+s) \overset{!}{=}$

$\overset{(2)}{=} g(x + s \cdot v, t+s)$ mit:

$w(0) - w(-t) = \int_t^0 w'(s)\,ds$

$u(x,t) - u(x - tv, 0) = \int_{-t}^{0} g(x+sv, t+s)\,ds$

(nach homogenem Fall galt: $u(x-tv, 0) = f(x-tv)$). Daraus folgt:

$u(x,t) - f(x - tv) = \int_0^t g(x - v(t-s), s)\,ds$

nach Substitution: $\varphi = t - s$ folgt:

$$u(x,t) = \overbrace{f(x-tv)}^{\text{Lösung der homogenen}} + \int_0^t g(x - v(t-s), s)\,ds$$

Seperationsansatz

Form: mehrdimensionale Funktion die unterschiedlich partiell abgeleitet wird.

⇒ Ansatz: $u(x,t) = v(x) \cdot w(t)$. Setzt man diesen Ansatz in das Beispiel $u_t - u_{xx} = 0$ ein folgt: $v(x) \cdot w'(t) - w(t) \cdot v''(x) = 0$

➜ $\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w'(t)}{w(t)} = d \in \mathbb{R}$ → muss immer Konstante geben. ← Ableitung immer oben. Nun wählt man eine Seite aus (meistens die mit mehr Ableitung; oft auch $v(x)$), je nach AWP. bei $u(0,t)$ → wähle $v(x)$ bei $u(x,0)$ wähle $w(t)$. Es gilt hier, wenn wir v auswählen: $\frac{v''(x)}{v(x)} = d \Rightarrow v''(x) - d \cdot v(x) = 0$ Nun Schritte befolgen:

S1 3 Fälle Prüfen ($\lambda = 0, \lambda > 0, \lambda < 0$) → entweder Ansatz $e^{\lambda t}$, Euler, $ax+b, \dots$

S2 Mit Randbedingung & Koeffizientenvergleich nichttriviale Lösung bestimmen.

S3 $v_k(x)$ für das bestimmte d aufstellen. S4 vorher bestimmtes d in $\frac{w'(t)}{w(t)} = d$ einsetzen. S5 lineare DGL für $w(t)$ lösen. S6 [nur falls v_k & w_k folgen]: Die allg. Lösung ergibt sich durch Aufsummieren: $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) \cdot w_k(t)$ S7 falls $v(x)$ & $w(t)$ direkt bekannt sind; $u(x,t) = v(x) \cdot w(t)$. S7 Einsetzen des AWP liefert nach Koeffizientenvergleich die entgültige Lösung.

Bsp. zu Lindelöf Zeigen Sie mit dem Satz von P.L. dass das AWP eindeutig lösbar ist. AWP: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

→ wenn $F(t,x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$, dann F für jedes $(t,x,y) \in \mathbb{R}$ stetig partiell nach allen Variablen db.bar. Somit ist das gegebene AWP nach P.L. eindeutig lösbar. Die Picard-Iteration ist gegeben durch:

$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \forall t \in \mathbb{R}$, $y_{n+1}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} -y_n(s) \\ x_n(s) \end{pmatrix} ds \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} -s \\ 1 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 - t^2/2 \\ t \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} -s \\ 1 - \frac{s^2}{2} \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 1 - t^2/2 \\ t - t^3/3! \end{pmatrix}$

Potenzreihen

$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{2n!}$

$\sinh(x) = \sum_{n=0} \frac{x}{(2n+1)!}$

$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

$\arctan(x) = \sum_{n=0} \frac{(-1) \cdot x}{2n+1}$

$\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{0.5}{n} x^n$

allg. $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n$

$e^x = \sum_{n=0} \frac{x^n}{n!}$

Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 \cdot q^k = \frac{a_0}{1-q}$ für $q<1$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \to e$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \to 2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$

Folgen $n \to \infty$

$\sqrt[n]{a} \to 1$, $\sqrt[n]{n} \to 1$, $\sqrt[n]{n!} \to \infty$

$\frac{1}{n} \cdot \sqrt[n]{n!} \to \frac{1}{e}$, $(1+\frac{1}{n})^n \to e$,

$(1+\frac{x}{n})^n \to e^x$, $(1-\frac{x}{n})^n \to e^{-x}$

$\frac{n^n}{n!} \to \infty$

Additionstheoreme $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$, $\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x) \cdot \tan(y)}$

$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$, $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

$\sin(\varphi) \cdot \sin(\theta) = \frac{\cos(\varphi-\theta) - \cos(\varphi+\theta)}{2}$, $\cos(\varphi) \cdot \cos(\theta) = \frac{\cos(\varphi+\theta) + \cos(\varphi-\theta)}{2}$

sin, cos, sinh, cosh

$\sin(2\varphi) = 2\sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi)$, $\cos(2\varphi) = \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi) = 1 - 2\sin^2(\varphi)$

$\sin(\varphi) \cdot \cos(\theta) = \frac{\sin(\varphi+\theta) + \sin(\varphi-\theta)}{2}$, $\cot(x \pm y) = \frac{\cot(x) \cdot \cot(y) \mp 1}{\cot y \pm \cot x}$

$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -i \cdot \sin(ix)$

$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cos(ix)$

$\operatorname{arcsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

$\operatorname{arccosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

$\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$

$\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$

$\sin(-x) = -\sin(x)$

$\cos(x) = \cos(-x)$

Integrale:

$\tan^2(x) + 1 = \frac{1}{\cos^2(x)} \to \tan(x) \to -\frac{\ln(|\cos(ax)|)}{a}$

$2a\cos(ax)\sin(ax) \to \sin^2(ax) \to -\frac{\sin(2ax)}{4a} + \frac{x}{2}$

$-2a\cos(ax)\sin(ax) \to \cos^2(ax) \to \frac{\sin(2ax)}{4a} + \frac{x}{2}$

$\frac{a}{a^2x^2+1} \to \arctan(ax) \to x \cdot \arctan(ax) - \frac{\ln(a^2x^2+1)}{2a}$

$a \cdot \cosh(ax) \to \sinh(ax) \to \frac{\cosh(ax)}{a}$

$a\sinh(ax) \to \cosh(ax) \to \frac{\sinh(ax)}{a}$

$\frac{1}{x} \to \ln(ax) \to x(\ln(ax) - 1)$

$\frac{2\ln(ax)}{x} \to \ln^2(ax) \to x(\ln^2(ax) - 2\ln(ax) + 2)$

$\arctan(ax) + \frac{ax}{a^2x^2+1} \to x\arctan(ax) \to \frac{(a^2x^2+1)\arctan(ax) - ax}{2a^2}$

$-\frac{1}{\sin^2(x)} \to \cot(ax) \to \frac{\ln(|\sin ax|)}{a}$

$\frac{a}{2\sqrt{ax}} \to \sqrt{ax} \to \frac{2\sqrt{a}\, x^{3/2}}{3}$

$\frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}} \to \arcsin(ax) \to x \cdot \arcsin(ax) + \frac{\sqrt{1-a^2 \cdot x^2}}{a}$

$-\frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}} \to \arccos(ax) \to x \cdot \arccos(ax) - \frac{\sqrt{1-a^2x^2}}{a}$

$\frac{1}{\cosh^2(x)} \to \tanh(x) \to \frac{\ln(\cosh(ax))}{a}$

$\frac{a}{1-a^2x^2} \to \operatorname{arctanh}(x) \to \frac{\ln(|a^2x^2-1|)}{2a} + x\operatorname{arctanh}(ax)$

$\frac{a}{\sqrt{a^2x^2-1}} \to \operatorname{arccosh}(ax) \to x\operatorname{arccosh}(ax) - \frac{\sqrt{a^2x^2-1}}{a}$

$\frac{a}{\sqrt{a^2x^2+1}} \to \operatorname{arcsinh}(ax) \to x\operatorname{arcsinh}(ax) - \frac{\sqrt{a^2x^2+1}}{a}$

$3a\cos(ax)\sin^2(ax) \to \sin^3(ax) \to \frac{\cos(ax)(\cos^2(ax)-3)}{3a}$

$-3a\cos^2(ax)\sin(ax) \to \cos^3(ax) \to -\frac{\sin(ax)(\sin^2(ax)-3)}{3a}$

$\sin^2(ax) \cdot \cos(bx) \to -\frac{\sin((b+2a)x)}{4(b+2a)} - \frac{\cos((b-2a)x)}{4(b-2a)} - \frac{\cos(bx)}{2b}$

$\cos^2(ax) \cdot \sin(bx) \to -\frac{\cos((b+2a)x)}{4(b+2a)} - \frac{\cos((b-2a)x)}{4(b-2a)} - \frac{\cos(bx)}{2b}$

Bsp 2: Lindelöf $F(x,y) = x^2 + xy^2$

nach Lindelöf: $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2xy$ ist das gegebene AWP eindeutig lösbar. Die Picard-Iteration ist gegeben durch $y_0(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$y_{n+1} = \int_0^x t^2 + t y_n^2(t)\, dt \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y_1(x) = \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3}$,

$y_2(x) = \int_0^x t^2 + \frac{t^7}{9}\, dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^8}{72}$

Bsp: Potenzreihenansatz

$y'' + 2xy' - y = (1+x+x^2)e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = \frac{1}{2}$ Ansatz: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$

Ansatz einsetzen gibt: $y'' + 2xy' - y = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2n \cdot a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} \cdot x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2n a_n \cdot x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} + (2n-1)a_n)x^n$. Nun die $(1+x+x^2)e^x$ zu Reihe machen.

$= (1+x+x^2)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n-2)!} = 1 + 2x \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-2)!}\right) x^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n^2}{n!} x^n$ → nun gleichsetzen beider Ausdrücke:

$\sum_{n=0}^{\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} + (2n-1)a_n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n^2}{n!} x^n$

$\Rightarrow (n+2)(n+1)a_{n+2} + (2n-1)a_n = \frac{1+n^2}{n!}$

$\Rightarrow a_{n+2} = \frac{1+n^2}{(n+2)!} - \frac{2n-1}{(n+2)(n+1)} a_n$, $n \geq 0$

Aussage: zeigen Sie, dass die Koeffizienten explizit gegeben sind durch:

$\underbrace{a_n = \frac{1}{2(n-1)!}}$. Da $y(0) = 0 = a_0$, $y'(0) = \frac{1}{2} = a_1$

→ dieses a_n in: $a_{n+2} = \frac{1+n^2}{(n+2)!} - \frac{2n-1}{(n+2)(n+1)} a_n$ einsetzen:

$a_{n+2} = \frac{1+n^2}{(n+2)!} - \frac{2n-1}{(n+2)(n+1)} \cdot \frac{1}{2(n-1)!} = \frac{1}{2} \frac{2+2n^2-(2n-1)n}{(n+2)!} = \frac{1}{2} \frac{2+n}{(n+2)!}$

$= \frac{1}{2(n+1)!}$, da $a_n = \frac{1}{(2n-1)!}$ muss $a_{n+2} = \frac{1}{2(n+1)!}$, q.e.d. ∎

Nun folgt: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} \cdot x^n = \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1}$

$y(x) = \frac{x}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot x^n = \frac{x}{2} \cdot e^x$

Bsp.: DGS $A = \begin{vmatrix} -4 & 12 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}$, $A^2 = \begin{vmatrix} -8 & 24 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 2A$ somit

$A^3 = A \cdot A^2 = 2A \cdot A = 2 \cdot A^2 = 2 \cdot 2 \cdot A = 2^2 A \to A^k = 2^{k-1} \cdot A$, da die Aussage für $k=0$ falsch gilt:

$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot t^k \cdot A^k = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \cdot A^k = I + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \cdot 2^k \cdot A$

$= I - \frac{1}{2} \sum \frac{1}{k!} (2t)^k \cdot A = I - \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} e^{2t} A = \begin{pmatrix} 3-2e^{2t} & -6+6e^{2t} \\ \ldots e^{2t} & -2+\ldots e^{2t} \end{pmatrix}$