UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I

27.09.2000
Herbst 2000

DIPLOM–VORPRÜFUNG

zur Höheren Mathematik für Elektroingenieure und Physiker

3. KLAUSUR

1. Aufgabe (10 Punkte):

Gegeben sind die Abbildung

$$w(z) = \frac{z}{z-i}$$

und das Gebiet

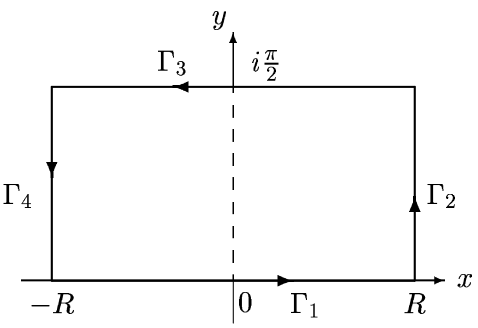
$$G = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \;,\;\; 0 < \arg z < \frac{3\pi}{2} \right\} .$$

a) Skizzieren Sie G.

b) Bestimmen und skizzieren Sie $w(G)$. Wenn im Bild Kreis- bzw. Geradenstücke vorkommen, so geben Sie Mittelpunkt und Radius des Kreises bzw. die Geradengleichung an. Begründen Sie sorgfältig.

c) Geben Sie eine Möbius-Transformation T an, die den Rand des Einheitskreises auf die reelle Achse und die reelle Achse auf den Rand des Einheitskreises abbildet.

2. Aufgabe (10 Punkte):



Gegeben sind die Funktion

$$f(z) = \frac{z e^{z}}{4 + 4e^{4z}}$$

und der nebenan skizzierte Integrationsweg $\Gamma_R = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$ mit $R > 0$.

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\, dz \;.$$

b) Zeigen Sie durch geeignete Abschätzungen, daß gilt:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_2} f(z)\, dz \;=\; \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_4} f(z)\, dz \;=\; 0$$

c) Bestimmen Sie die Werte der Integrale

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{x}}{4 + 4e^{4x}}\, dx \quad \text{und} \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{x}}{4 + 4e^{4x}}\, dx \quad .$$

Die Existenz der uneigentlichen Integrale braucht nicht gezeigt zu werden.

3. Aufgabe (10 Punkte):

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$(*) \qquad (8x^6y^3 + 2x^4y)dx + (4x^7y^2 - 3x^3)dy = 0 \quad .$$

a) Bestimmen Sie alle $k \in \mathbb{Z}$, $\ell \in \mathbb{Z}$, so daß durch

$$\mu(x, y) = x^k y^\ell$$

ein integrierender Faktor gegeben ist.

b) Geben Sie die Lösung von $(*)$ durch $(-1, 1)$ in impliziter Form an. Berechnen Sie außerdem noch eine explizite Darstellung dieser Lösung in einer Umgebung von $(-1, 1)$.

4. Aufgabe (10 Punkte):

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$(\star) \qquad xy'' + (2x - 1)y' + (x - 1)y = 0 \quad , \quad x > 0 \, .$$

a) Gehen Sie mit dem Ansatz

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

in $(\star)$ ein, und leiten Sie eine Rekursionsformel für die Koeffizienten a_n her. Bestimmen Sie eine Lösung von $(\star)$, indem Sie $a_0 = 1$ und $a_2 = \frac{1}{2}$ setzten, und geben Sie diese Lösung in geschlossener Form an.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $(\star)$ in geschlossener Form.

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

Die Ergebnisse der Vordiplomklausuren hängen ab Dienstag, dem 10. Oktober, vor dem Sekretariat aus und liegen unter

`http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~mi1/Schneider/HM/vd-h.html`

im Internet.

Die Klausureinsicht findet für diejenigen, die sich einer mündlichen Nachprüfung stellen müssen, am Donnerstag, dem 19. Oktober, von 13.15 bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 (Mathematikgebäude) statt. Ort und Termin für alle übrigen werden noch bekanntgegeben.

Die Nachprüfungen selbst sind in der Woche vom 23. bis 27. Oktober.