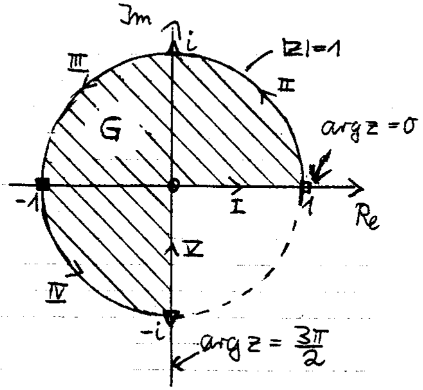
# Lösung zur 3. Klausur Diplom-Vorprüfung am 27.09.2000

**1. Aufgabe** $\quad w(z) = \frac{z}{z-i}$ → Möbius-Transf.: Kreis-, Winkel-, Orientierungstreue

$$G = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z|<1 \,,\; 0 < \arg z < \frac{3\pi}{2} \right\}$$

a) Skizze, wobei G schraffiert ist und der Rand nicht dazu gehört.




b) G wird berandet von der posit. reellen Achse, der negat. imag. Achse und einem Teil der Einheitskreislinie.

⇒ Bilde diese Berandungslinien mit $w$ ab

Zunächst einige „wichtige" Punkte:

$w(0) = 0$, $w(1) = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2}$, $w(i) = \infty$, $w(-1) = \frac{-1}{-1-i} = \frac{1-i}{2}$

$w(-i) = \frac{-i}{-i-i} = \frac{1}{2}$, $w(\infty) = 1$

Imag. Achse ($i\mathbb{R}$): $i \in i\mathbb{R} \Rightarrow w(i\mathbb{R})$ ist eine Gerade

genauer: reelle Achse, denn $w(it) \overset{t\in\mathbb{R}}{=} \frac{it}{it-i} = \frac{t}{t-1} \in \mathbb{R}$

reelle Achse ($\mathbb{R}$): $i \notin \mathbb{R} \Rightarrow w(\mathbb{R})$ ist ein Kreis, wobei:

$\mathbb{R}$ schneidet $i\mathbb{R}$ senkrecht in $0$ und $\infty$

⇒ $w(\mathbb{R})$ schneidet $\underbrace{w(i\mathbb{R})}_{=\mathbb{R}}$ senkrecht im $w(0) = 0$ und $w(\infty) = 1$

also: $w(\mathbb{R})$ ist Kreis um $\frac{1}{2}$ mit Radius $\frac{1}{2}$

↳ $= \{ w \in \mathbb{C} : |w - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2} \} =: \frac{1}{2}\partial D + \frac{1}{2}$ (mit $\partial D$: Rand des Einh.-kreises)

Einheitskreislinie ($\partial D$): $i \in \partial D \Rightarrow w(\partial D)$ ist Gerade, wobei

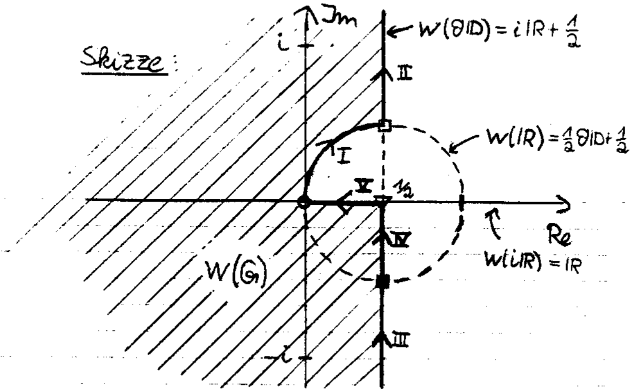
$\partial D$ schneidet $i\mathbb{R}$ senkrecht in $i$ und $-i$

⇒ $w(\partial D)$ schneidet $w(i\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ in $w(i) = \infty$ und $w(-i) = \frac{1}{2}$

also: $w(\partial D)$ ist die um $\frac{1}{2}$ nach rechts verschobene imag. Achse

$= \{ w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w = \frac{1}{2} \} = i\mathbb{R} + \frac{1}{2}$

Skizze:




W(G) ist schraffiert, der Rand gehört nicht dazu.

G liegt links, wenn man folgenden Weg geht (siehe Skizze in a))

$$0 \xrightarrow[\mathrm{I}]{\mathbb{R}} 1 \xrightarrow[\mathrm{II}]{\partial D} i \xrightarrow[\mathrm{III}]{\partial D} -1 \xrightarrow[\mathrm{IV}]{\partial D} -i \xrightarrow[\mathrm{V}]{i\mathbb{R}} 0$$

Somit liegt dann $w(G)$ ebenfalls links des Weges

$$w(0) \xrightarrow[\mathrm{I}]{w(\mathbb{R})} w(1) \xrightarrow[\mathrm{II}]{w(\partial D)} w(i) \xrightarrow[\mathrm{III}]{w(\partial D)} w(-1) \xrightarrow[\mathrm{IV}]{w(\partial D)} w(-i) \xrightarrow[\mathrm{V}]{w(i\mathbb{R})} w(0)$$

bzw.

$$0 \xrightarrow{w(\mathbb{R})} \frac{1+i}{2} \xrightarrow{w(\partial D)} \infty \xrightarrow{w(\partial D)} \frac{1-i}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} \xrightarrow[=\mathbb{R}]{w(i\mathbb{R})} 0$$

⇒ Neben $\partial W(G)$ ist somit auch $W(G)$ bestimmt. Ergebnis: siehe Skizze

c) Gesucht ist $T$ mit $T(\partial D) = \mathbb{R}$ und $T(\mathbb{R}) = \partial D$

Bekannt aus b) ist: $w(\partial D) = i\mathbb{R} + \frac{1}{2}$ u. $w(\mathbb{R}) = \frac{1}{2}\partial D + \frac{1}{2}$

⇒

Eine Abbildung $T$ geht z.B. aus $w$ hervor: Verschiebung um $\frac{1}{2}$ nach links, Streckung um Faktor 2 und anschl. Drehung um $\frac{\pi}{2}$, d.h.

$$T(z) = \left(w(z) - \tfrac{1}{2}\right) \cdot 2 \cdot i = \left(\frac{z}{z-i} - \frac{1}{2}\right) \cdot 2i = \frac{2iz - iz - 1}{z-i} = \underline{\underline{\frac{iz-1}{z-i}}}$$

**2. Aufgabe**

$$f(z) = \frac{z\, e^{z}}{4(1+e^{4z})} = \frac{\frac{1}{4} z\, e^{z}}{1+e^{4z}}$$

a) $\int_{\Gamma_R} f(z)\, dz = \oint_{\Gamma_R} f(z)\, dz$ ⇒ geschlossener Weg ⇒ Residuensatz anwenden

Singularitäten d.h. hier Nennernullstellen von $f$ bestimmen.

$$1+e^{4z}=0 \iff e^{4z}=-1=1\cdot e^{i\pi+2k\pi i} \iff 4z=i(\pi+2k\pi)$$
$$\iff z_k=\frac14 i(\pi+2k\pi) \qquad \Rightarrow \underline{\underline{z_0=i\frac{\pi}{4}}}$$

Es handelt sich jeweils um einfache Polstellen, da $\frac{d}{dz}(1+e^{4z})\big|_{z_k}=4\cdot e^{4z_k}\neq 0$ und da der Zähler bei $z_k$ keine Nullstelle hat.

$\Rightarrow$ Polstellen liegen alle auf $i\mathbb{R}$ und nur $z_0$ liegt innerhalb des von $\Gamma_R$ berandeten Gebiets.

also: $$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,z_0) \underset{\text{einf. Polstelle}}{=} 2\pi i \left.\frac{\frac14 z\cdot e^z}{(1+e^{4z})'}\right|_{z_0} =$$
$$= 2\pi i \frac{\frac14 i\frac{\pi}{4}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}}{4\cdot e^{4i\frac{\pi}{4}}} = \underline{\underline{\frac{1}{32}\pi^2\cdot\frac{1}{\sqrt2}(1+i)}}$$

b) Parametrisierung des Weges $\Gamma_R$:

$\Gamma_1: \; z=t, \; t\in[-R,R], \; dz=dt$

$\Gamma_2: \; z=R+it, \; t\in[0,\frac{\pi}{2}], \; dz=i\,dt$

$-\Gamma_3: \; z=t+i\frac{\pi}{2}, \; t\in[-R,R], \; dz=dt$

$-\Gamma_4: \; z=-R+it, \; t\in[0,\frac{\pi}{2}], \; dz=i\,dt$

(i) $$0\le \left|\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz\right| = \left|\int_0^{\pi/2} \frac14 \frac{(R+it)\cdot e^{R+it}}{1+e^{(R+it)4}}\, i\,dt\right| \le \int_0^{\pi/2}\frac14\frac{|R+it|\cdot|e^{R+it}|}{|1+e^{(R+it)4}|}|i|\,dt$$
$$\underset{\triangle\text{ Ungl.}}{\le} \frac14\int_0^{\pi/2}\frac{(|R|+|it|)\cdot e^R}{|e^{R4}-1|}\,dt \underset{R>0}{=} \frac14\int_0^{\pi/2}\frac{(R+t)\cdot e^R}{e^{R4}-1}\,dt = \frac14\frac{e^R}{e^{R4}-1}\left[Rt+\frac12 t^2\right]_0^{\pi/4}$$
$$=\frac14\left(R\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{\pi^2}{32}\right)\cdot\frac{e^R}{e^{4R}-1} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

(ii) $$0\le \left|\int_{-\Gamma_4} f(z)\,dz\right| = \left|\int_{+\frac{\pi}{2}}^{0}\frac14\frac{(-R+it)\cdot e^{-R+it}}{1+e^{(-R+it)\cdot4}}\, i\,dt\right| \le \dots \overset{\triangle\text{ Ungl.}}{\le}$$
$$=\frac14\int_0^{\pi/2}\frac{(|-R|+|it|)\cdot e^{-R}}{|e^{-4R}-1|}\,dt \underset{\substack{R>0\\ t>0}}{=} \frac14\int_0^{\pi/2}\frac{(R+t)\, e^{-R}}{1-e^{-4R}}\,dt = \frac14\frac{e^{-R}}{1-e^{-4R}}\left[Rt+\frac12 t^2\right]_0^{\pi/4}$$



$$= \frac14\frac{e^{-R}}{1-e^{-4R}}\left(\frac{\pi}{4}R+\frac{\pi^2}{32}\right) \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

somit gilt: $$\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_4} f(z)\,dz = 0$$

c)
$$\frac{1}{32}\pi^2\frac{1}{\sqrt2}(1+i) \overset{\text{Siehe a)}}{=} \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz+\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz+\int_{\Gamma_3} f(z)\,dz+\int_{\Gamma_4} f(z)\,dz$$
$$=\int_{-R}^{R}\frac{t\cdot e^t}{4+4e^{4t}}\,dt + \int_{\Gamma_2}\dots + \int_{R}^{-R}\frac{(t+i\frac{\pi}{2})\cdot e^{t+i\frac{\pi}{2}}}{4+4\cdot e^{4(t+i\frac{\pi}{2})}}\,dt + \int_{\Gamma_4}\dots$$
$$=\int_{-R}^{R}\frac{t\, e^t}{4+4e^{4t}}\,dt + \int_{\Gamma_2}\dots - \int_{-R}^{R}\frac{(t+i\frac{\pi}{2})\cdot i\cdot e^t}{4+4e^{4t}}\,dt + \int_{\Gamma_4}\dots$$
$$=\int_{-R}^{R}\frac{t\, e^t}{4+4e^{4t}}\,dt + \underbrace{\int_{\Gamma_2}\dots}_{\to 0 \text{ s.o.}} - i\int_{-R}^{R}\frac{t\, e^t}{4+4e^{4t}}\,dt + \int_{-R}^{R}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^t}{4+4e^{4t}}\,dt + \underbrace{\int_{\Gamma_4}\dots}_{\to 0\text{ s.o.}}$$
$$\xrightarrow{R\to\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t\, e^t}{4+4e^{4t}}\,dt+\frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^t}{4+4e^t}\,dt\right) - i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t\, e^t}{4+4e^{4t}}\,dt$$

Getrennt nach Re- u. Im.-teil

Betrachte Imaginärteil:
$$\frac{1}{32}\pi^2\frac{1}{\sqrt2} = -\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t\, e^t}{4+4e^{4t}}\,dt}_{=I_1} \Rightarrow \underline{\underline{I_1 = -\frac{1}{32}\pi^2\frac{1}{\sqrt2}}} = \underline{\underline{-\frac{1}{64}\pi^2\sqrt2}}$$

Betrachte Realteil:
$$\frac{1}{32}\pi^2\frac{1}{\sqrt2} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{t\, e^t}{4+4e^{4t}}\,dt+\frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^t}{4+4e^{4t}}\,dt = I_1+\frac{\pi}{2}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^t}{4+4e^{4t}}\,dt}_{=I_2}$$

also: $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^t}{4+4e^{4t}}\,dt = \frac{1}{16}\pi^2\frac{1}{\sqrt2}\cdot\frac{2}{\pi} = \underline{\underline{\frac{1}{16}\pi\sqrt2}} = I_2$$

## 3. Aufgabe

(*) $\left(8x^6y^3+2x^4y\right)dx + \left(4x^7y^2-3x^3\right)dy = 0$

setze: $p(x,y) = 8x^6y^3+2x^4y \Rightarrow p_y = 24x^6y^2+2x^4$

$q(x,y) = 4x^7y^2-3x^3 \Rightarrow q_x = 32x^6y^2-9x^2$ $\neq$

$\Rightarrow$ (*) ist nicht exakt

Ansatz mit integrierenden Faktor $\mu(x,y) = x^k y^l$ (wobei $k\neq0, l\neq0$ da )

$\Rightarrow$ Multiplikation von (*) mit $\mu(x,y)$ wird betrachtet:

(**) $p(x,y)\,\mu(x,y)\,dx + q(x,y)\,\mu(x,y)\,dy = 0$

exakt $\Leftrightarrow$ $(p\cdot\mu)_y = (q\cdot\mu)_x$

$(p\cdot\mu)_y = \left(8x^{6+k}y^{3+l}+2x^{4+k}y^{1+l}\right)_y = 8(3+l)x^{6+k}y^{2+l}+2(1+l)x^{4+k}y^{l}$

$(q\cdot\mu)_x = \left(4x^{7+k}y^{2+l}-3x^{3+k}\right)_x = 4(7+k)x^{6+k}y^{2+l}-3(3+k)x^{2+k}$

Die Gleichheit für $\forall x,y$ ist genau dann erfüllt, wenn gilt:

i) $8(3+l) = 4(7+k)$ $= 16$ ok.

ii) $2(1+l) = 0 \Rightarrow l = -1$

iii) $3(3+k) = 0 \Rightarrow k = -3$

$\Rightarrow$ $\mu(x,y) = \frac{1}{x^3y}$

somit (**) $\left(8x^3y^2+2x\right)dx + \left(4x^4y - 3\cdot\frac{1}{y}\right)dy = 0$

Gesucht: Stammfunktion $F(x,y)$ mit

$F_x = 8x^3y^2+2x \Rightarrow F = 2x^4y^2+x^2+\tilde{C}(y)$

$F_y = 4x^4y - \frac{3}{y} \overset{!}{=} F_y = 4x^4y+\tilde{C}'(y)$

$\Rightarrow \tilde{C}'(y) = -\frac{3}{y} \Rightarrow \tilde{C}(y) = -3\cdot\ln|y| + c$ , $c\in\mathbb{R}$



also: $F(x,y) = 2x^4y^2+x^2-3\ln|y|$ ist eine Stammfunktion (Wähle: $c=0$)

Die Lösung der DGL (*) (und natürlich auch (**)) ist implizit durch

$F(x,y) = 2x^4y^2+x^2-3\ln|y| = d$ , $d = \text{const} \in\mathbb{R}$

gegeben.

Lösung durch $(-1,1)$: $F(x,y)\big|_{(-1,1)} = F(-1,1) = 2+1-0 = 3$

$\Rightarrow$ $2x^4y^2+x^2-3\ln|y| = 3$ ist gesuchte Lösung in impliziter Form

Explizite Darstellung, d.h. nach $x$ oder $y$ auflösen. Auflösung nach $y$ ist nicht möglich, da $y$ und $\ln|y|$ vorkommen, also nach $x$.

Zunächst umsortieren:

$$2y^2x^4 + x^2 - 3(\ln|y|+1) = 0$$

Subst. $u := x^2 \Rightarrow u^2 = x^4$ d.h.

$$2y^2u^2 + u - 3(\ln|y|+1) = 0$$ ← quadr. Gleichung in $u$

$\Rightarrow u_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+24y^2(\ln|y|+1)}}{4y^2}$ („+", da $u = x^2 \geq 0$)

Rücksubst.: $x = x(y) = \overset{(+)}{-}\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+24y^2(\ln|y|+1)}}{4y^2}}$ („−" da $x(1)\overset{!}{=}-1$)

## 4. Aufgabe

DGL: $xy'' - (2x-1)y' + (x-1)y = 0$ $(x>0)$

a) Ansatz: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ , $y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ , $y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}$

eingesetzt: $0 = x\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} + (2x-1)\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + (x-1)\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n =$

$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)a_nx^n$

Überall $x^{n-1}$ „erzeugen":

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} 2(n-1)a_{n-1}x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)na_n x^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)a_{n-1}x^{n-1}$$

Überall $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dots$ :

$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} 2(n-1)a_{n-1}x^{n-1} +$$

$$- a_1x^0 + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)na_nx^{n-1} +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^{n-1} +$$

$$- a_0x^0 + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)a_{n-1}x^{n-1}$$

$$= -a_1 - a_0 + \sum_{n=2}^{\infty}\left(n(n-1)a_n + 2(n-1)a_{n-1} - na_n + a_{n-2} - a_{n-1}\right)x^{n-1}$$

$$= -a_1 - a_0 + \sum_{n=2}^{\infty}\left(n(n-2)a_n + (2n-3)a_{n-1} + a_{n-2}\right)x^{n-1} = 0$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$-a_1 - a_0 = 0 \iff a_1 = -a_0 = -1$$

$$n(n-2)a_n + (2n-3)a_{n-1} + a_{n-2} = 0 \quad \text{f. } n \geq 2$$

$n=2$: $\quad 0 + 1\cdot a_1 + a_0 = 0 \quad$ stimmt f. $\forall a_2 \in \mathbb{R}$ (s.o)

$\Rightarrow$ $a_2$ kann frei gewählt werden, hier, nach Aufgabe: $a_2 = \frac{1}{2}$

$n \geq 3$: $\quad a_n = \dfrac{(3-2n)a_{n-1} - a_{n-2}}{n(n-2)} \quad \boxed{\text{Rekursionsformel}}$

$n=3$: $\quad a_3 = \dfrac{(3-6)\cdot a_2 - a_1}{3\cdot 1} = \dfrac{-3\cdot\frac{1}{2} + 1}{3} = -\dfrac{1}{6} = -\dfrac{1}{3!}$

$n=4$: $\quad a_4 = \dfrac{(3-8)\cdot(-\frac{1}{6}) - \frac{1}{2}}{8} = \left(+\dfrac{5}{6} - \dfrac{1}{2}\right)\cdot\dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{24} = \dfrac{1}{4!}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Vermutung}}$: $\quad a_n = \dfrac{1}{n!}(-1)^n \quad n \in \mathbb{N}$



Beweis durch vollst. Induktion:

Ind. Anfang: $\quad a_0 = \frac{1}{0!} = 1$ ; $a_1 = -\frac{1}{1!} = -1 \quad a_2 = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Vermutung}}$ stimmt für $n=0$, $n=1$, $n=2$

Ind. Annahme(n): $\quad a_n = \dfrac{1}{n!}(-1)^n$ und $a_{n-1} = \dfrac{1}{(n-1)!}(-1)^{n-1}$ gelten für ein $n \in \mathbb{N}$ (wobei $n \geq 2$)

Rekursionsformel (gilt f $n \geq 2$)

Ind. Schluß: $\quad a_{n+1} = \dfrac{(3-2(n+1))\cdot a_n - a_{n-1}}{(n+1)(n-1)} = \dfrac{(1-2n)a_n - a_{n-1}}{(n+1)(n-1)}$

$$\overset{\text{I.A.}}{=} \frac{(1-2n)\cdot\frac{1}{n!}(-1)^n - \frac{1}{(n-1)!}(-1)^{n-1}}{(n+1)(n-1)}$$

$$= \left(\frac{(-1)^n}{n!} - \frac{2\cdot(-1)^n}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\right)\cdot\frac{1}{(n+1)(n-1)}$$

$$= \left(\frac{(-1)^n}{n!} - \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\right)\cdot\frac{1}{(n+1)(n-1)} = \frac{(-1)^n(1-n)}{n!\,(n+1)\cdot(n-1)}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \Rightarrow \boxed{\text{Vermutung}} \text{ stimmt auch für } n \geq 3$$

also: $\quad \underline{\underline{a_n = \dfrac{(-1)^n}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}}}$

somit: $\quad y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}x^n = \underline{\underline{e^{-x}}} \quad =: y_1(x)$

b) Bestimme eine 2. lin. unabh. Lösung mittels Reduktion der Ordnung

Ansatz: $\quad y_2(x) = u(x)\cdot y_1(x) = u(x)\cdot e^{-x}$

$\quad y_2' = u'e^{-x} - ue^{-x}$ ; $\quad y_2'' = u''e^{-x} - 2u'e^{-x} + ue^{-x}$

eingesetzt: $\left[xu'' - 2xu' + xu + (2x-1)\cdot(u'-u) + (x-1)u\right]e^{-x} = 0$

$\quad \Rightarrow \quad xu'' - u' = 0$

Subst. $\quad v = u' \Rightarrow v' = u'' \quad \Rightarrow \quad x\cdot v' - v = 0 \quad \overset{\text{TdV}}{\Rightarrow} \quad v(x) = C\cdot x$, $C \in \mathbb{R}$

Rücksubst: $\quad u(x) = \frac{1}{2}Cx^2 + d = x^2$ [bei Wahl: $C=2$, $d=0$] $\quad (A, B \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow y_2(x) = u\cdot e^{-x} = x^2\cdot e^{-x} \quad \Rightarrow$ allg. Lösung: $\quad \underline{y_{allg}(x) = A\cdot y_1(x) + B\,y_2(x) = Ae^{-x} + Bx^2e^{-x}}$