Lösung zur Diplom-Vorprüfung

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 **a)** Als Möbiustransformation lässt sich T in der Form $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ und $ad - bc \neq 0$ darstellen. Die drei gegebenen Bedingungen liefern

$$b/d = 1 + i\,, \qquad c(-1-i) + d = 0 \qquad \text{und} \qquad a/c = -1 - i\,.$$

Dies bedeutet, mit der letzten Bedingung beginnend,

$$a = -(1+i)c\,, \qquad d = (1+i)c \qquad \text{sowie} \qquad b = (1+i)d = (1+i)^2 c = 2ic\,,$$

und $c \neq 0$ können wir beliebig wählen. Für $c = 1$ erhält man die Darstellung

$$T(z) = \frac{-(1+i)z + 2i}{z + (1+i)}\,.$$

b) Die behauptete Gleichheit ergibt sich aus der folgenden Äquivalenzenkette:

$$w = T(z) \quad \leftrightarrow \quad w = \frac{-(1+i)z + 2i}{z + (1+i)} \quad \leftrightarrow \quad wz + (1+i)w = -(1+i)z + 2i$$

$$\leftrightarrow \quad (w + 1 + i)z = -(1+i)w + 2i \quad \leftrightarrow \quad z = \frac{-(1+i)w + 2i}{w + (1+i)} \quad \leftrightarrow \quad z = T(w)$$

c) Das Gebiet G wird durch zwei verallgemeinerte Kreise berandet: Es liegt im Inneren des Kreises K um 0 mit Radius $\sqrt{2}$ und oberhalb der Geraden L mit der Gleichung $\operatorname{Im} z = -\operatorname{Re} z$ (siehe Skizze). Wir bestimmen daher zuerst $T(K)$ und $T(L)$, wobei wir die Kreistreue der Möbiustransformation T und das Ergebnis aus **b)** verwenden.

Wegen $T(-1-i) = \infty$ und $-1-i \in K$ wird K auf eine Gerade abgebildet. Die Gerade $T(K)$ geht durch den Punkt $T(1+i) = T^{-1}(1+i) = 0$ und durch

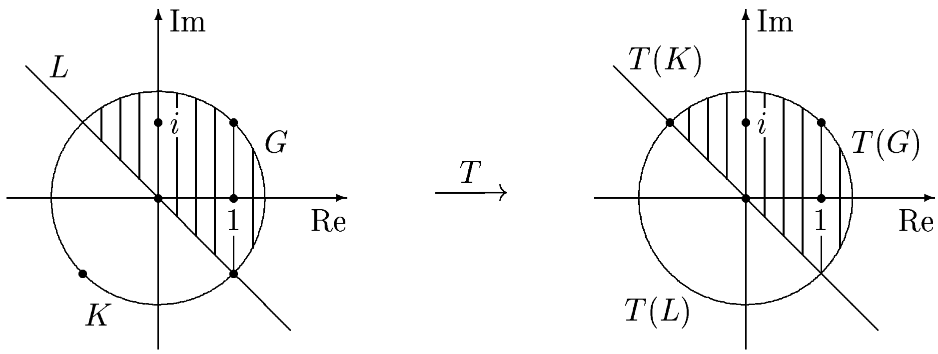
$$T(1-i) = \frac{-(1+i)(1-i) + 2i}{(1-i) + (1+i)} = \frac{-(1-i^2) + 2i}{2} = \frac{-2 + 2i}{2} = -1 + i\,,$$

d. h. es ist $T(K) = L$. Damit folgt $K = T^{-1}(L) = T(L)$.

Auch $T(G)$ wird somit von K und L berandet, und weil 0 und $1+i$ auf dem Rand von G liegen, gehören $T(0) = 1+i$ und $T(1+i) = 0$ zum Rand von $T(G)$. Also gilt $T(G) = G$.

d) Das Gebiet H ist der Teil der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$, der im ersten Quadranten liegt; durch $z \mapsto z^2$ kann man H auf die obere Hälfte von $\mathbb{D}$ abbilden. Aus dieser wiederum geht $T(G) = G$ offenbar durch eine Drehung um den Winkel $\frac{1}{4}\pi$ im Uhrzeigersinn (also eine Multiplikation mit $e^{-i\pi/4}$) und eine anschließende Streckung mit dem Faktor $\sqrt{2}$ hervor. Damit ergibt sich

$$f(z) = \sqrt{2} \cdot e^{-i\pi/4} \cdot z^2 = \sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(1-i) \cdot z^2 = (1-i)z^2\,.$$



Aufgabe 2 **a)** Nach Definition des Kurvenintegrals gilt

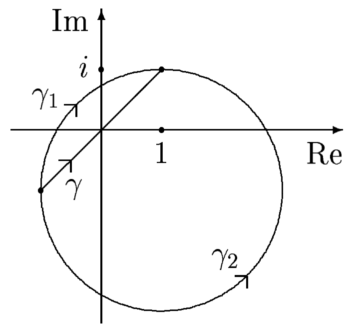
$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{-1}^{1} f(z(t))z'(t)\,dt = \int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+i)^2t^2+2i}\,(1+i)\,dt = \int_{-1}^{1} \frac{1+i}{2it^2+2i}\,dt$$

$$= \frac{1+i}{2i}\int_{-1}^{1}\frac{1}{t^2+1}\,dt = \tfrac{1}{2}(1-i)\,\mathrm{Arctan}\,t\,\Big|_{t=-1}^{1} = \tfrac{1}{2}(1-i)\big[\tfrac{\pi}{4}-(-\tfrac{\pi}{4})\big] = \tfrac{1}{4}(1-i)\pi\,.$$

b) Da $z^2+2i = z^2-(1-i)^2 = (z+1-i)(z-1+i)$ die zwei einfachen Nullstellen $z_1=-1+i$ und $z_2=1-i$ besitzt, hat die Funktion f in z_1 und z_2 jeweils eine Polstelle der Ordnung 1; weitere isolierte Singularitäten gibt es nicht. Zudem gilt

$$\mathrm{Res}(f;z_1) = \frac{1}{(z^2+2i)'}\Big|_{z=z_1} = \frac{1}{2z_1} = \frac{1}{2(-1+i)} = \frac{-1-i}{4}\,,\qquad \mathrm{Res}(f;z_2) = \frac{1}{2z_2} = \frac{1+i}{4}\,.$$

c) In der nebenstehenden Skizze sieht man, dass $\gamma+\gamma_1^-$ eine geschlossene, doppelpunktfreie und positiv orientierte Integrationskurve ist, auf der keine isolierte Singularität von f liegt; gleiches gilt für $\gamma_2+\gamma^-$.



Da auch im Inneren von $\gamma+\gamma_1^-$ keine isolierte Singularität von f liegt, liefert der Residuensatz $\int_{\gamma+\gamma_1^-} f(z)\,dz=0$, also

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz = \tfrac{1}{4}(1-i)\pi\,.$$

Im Inneren von $\gamma_2+\gamma^-$ liegt nur die Singularität z_2; daher folgt mit dem Residuensatz

$$\int_{\gamma_2+\gamma^-} f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f;z_2) = 2\pi i\cdot\tfrac{1}{4}(1+i) = \tfrac{1}{2}(i-1)\pi\,.$$

Damit ergibt sich

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \tfrac{1}{2}(i-1)\pi + \int_\gamma f(z)\,dz = \tfrac{1}{2}(i-1)\pi + \tfrac{1}{4}(1-i)\pi = \tfrac{1}{4}(i-1)\pi\,.$$

d) Nur die Nullstelle $z_2=1-i$ von z^2+2i liegt im Inneren von $|z-2|=2$. Da aber

$$\frac{\sin(z-1+i)}{z^2+2i} = \frac{\sin(z-z_2)}{(z-z_1)(z-z_2)} \xrightarrow{z\to z_2} \frac{1}{z_2-z_1}\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} = \frac{1}{z_2-z_1}$$

gilt, ist z_2 eine hebbare Singularität des Integranden, der dort also das Residuum 0 hat. Mit dem Residuensatz folgt, dass das zu berechnende Integral den Wert 0 besitzt.

Aufgabe 3 **a)** Wir schreiben die vorliegende Differentialgleichung in der Form

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y + 2x}, \qquad \text{also} \qquad (e^y + 2x)\, dy = 1\, dx\,.$$

Wir haben folglich die Differentialgleichung $F(x,y)\,dx + G(x,y)\,dy = 0$ mit $F(x,y) := 1$ und $G(x,y) := -e^y - 2x$ zu betrachten. Wegen

$$F_y(x,y) = 0 \neq -2 = G_x(x,y)$$

ist sie zwar nicht exakt, aber weil $(G_x - F_y)/F = -2$ nicht von x abhängig ist, gibt es einen integrierenden Faktor μ, der nur von y abhängt. Ein solches $\mu = \mu(y)$ muss der Bedingung $(\mu F)_y = (\mu G)_x$ genügen, also

$$\mu' F + \mu F_y = \mu G_x\,, \qquad \text{d. h.} \qquad \mu' = \frac{G_x - F_y}{F}\,\mu\,.$$

Damit haben wir die Differentialgleichung $\mu' = -2\mu$. Eine Lösung ist $\mu(y) = e^{-2y}$, und Multiplikation von $F\,dx + G\,dy = 0$ mit $\mu \neq 0$ führt auf die exakte Differentialgleichung

$$e^{-2y}\,dx + (-e^{-y} - 2xe^{-2y})\,dy = 0\,.$$

Für ein zugehöriges Potential f soll $f_x = e^{-2y}$ gelten. Daraus folgt

$$f(x,y) = xe^{-2y} + c(y)$$

mit einer gewissen Funktion c, und wir erhalten

$$f_y(x,y) = -2xe^{-2y} + c'(y) \stackrel{!}{=} -e^{-y} - 2xe^{-2y}\,.$$

Da $c'(y) = -e^{-y}$ gelten muss, wählen wir $c(y) = e^{-y}$ und haben damit das Potential $f(x,y) = xe^{-2y} + e^{-y}$ gefunden. Alle Lösungen der Differentialgleichung sind nun in impliziter Form durch $f(x,y) = C$ gegeben (mit $C \in \mathbb{R}$), also durch

$$(*) \qquad xe^{-2y} + e^{-y} = C \qquad (C \in \mathbb{R})\,.$$

Bemerkung: Ein anderer möglicher Lösungsweg besteht darin, die Differentialgleichung als eine Gleichung für $x = x(y)$ aufzufassen und dabei $y' = dy/dx = 1/x'$ zu verwenden.

b) Lösen wir $(*)$ nach x auf, so bekommen wir

$$x = Ce^{2y} - e^y\,.$$

Einsetzen von $x = -1$ und $y = 2$ liefert $-1 = Ce^4 - e^2$, also $C = (e^2 - 1)/e^4$. Die gesuchte Lösung ist

$$x = g(y) := \frac{e^2 - 1}{e^4}\, e^{2y} - e^y\,.$$

c) Einsetzen von $x = 0$ und $y = 1$ in $(*)$ liefert $C = e^{-1}$. Nun müssen wir noch $(*)$ bzw. $x = e^{-1}e^{2y} - e^y$ nach y auflösen. Mit der Substitution $u = e^y$ führt dies auf die Gleichung $u^2 - eu - ex = 0$ mit den Lösungen

$$u_{1,2} = \tfrac{1}{2}e \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}e^2 + ex}\,.$$

Für $x = 0$ soll $u = e^y = e^1$ sein, also liefert „+“ die richtige Lösung. Man hat damit

$$y = h(x) := \ln\Big(\tfrac{1}{2}e + \sqrt{\tfrac{1}{4}e^2 + ex}\Big)\,,$$

wobei h nur für $\frac{1}{4}e^2 + ex \geqslant 0$, also für $x \geqslant -\frac{1}{4}e$ definiert ist. (Das Argument der Logarithmus-Funktion ist offenbar stets > 0.) Differenzierbar ist h nur für $x > -\frac{1}{4}e$.

Aufgabe 4 **a)** Für $x > 0$ machen wir hier den verallgemeinerten Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\varrho}$, wobei $c_0 \neq 0$ vorausgesetzt wird. Es gilt

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\varrho) c_n x^{n+\varrho-1} \qquad \text{und} \qquad y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\varrho)(n+\varrho-1) c_n x^{n+\varrho-2}\,.$$

Folglich erhalten wir für die linke Seite der Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
3xy'' + (3x+1)y' + y &= \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+\varrho)(n+\varrho-1) c_n x^{n+\varrho-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+\varrho) c_n x^{n+\varrho} \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} (n+\varrho) c_n x^{n+\varrho-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+\varrho} \\
&= 3\varrho(\varrho-1) c_0 x^{\varrho-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 3(n+\varrho)(n+\varrho-1) c_n x^{n+\varrho-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 3(n+\varrho-1) c_{n-1} x^{n+\varrho-1} \\
&\quad + \varrho c_0 x^{\varrho-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (n+\varrho) c_n x^{n+\varrho-1} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^{n+\varrho-1} \\
&= \big(3\varrho(\varrho-1) + \varrho\big) c_0 x^{\varrho-1} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\big[3(n+\varrho)(n+\varrho-1) + (n+\varrho)\big] c_n + \big[3(n+\varrho-1)+1\big] c_{n-1} \Big) x^{n+\varrho-1}\,.
\end{aligned}$$

Damit dies $= 0$ ist, muss zunächst die charakteristische Gleichung $3\varrho(\varrho-1) + \varrho = 0$, also $3\varrho^2 - 2\varrho = 0$, erfüllt sein. Diese hat die zwei Lösungen $\varrho_1 = 0$ und $\varrho_2 = \frac{2}{3}$.

Durch weiteren Koeffizientenvergleich erhält man: Für alle $n \geqslant 1$ ist

$$\begin{aligned}
&\big[3(n+\varrho)(n+\varrho-1) + (n+\varrho)\big] c_n + \big[3(n+\varrho-1)+1\big] c_{n-1} = 0 \\
&\qquad \leftrightarrow \quad (n+\varrho)\big[3(n+\varrho-1)+1\big] c_n + \big[3(n+\varrho-1)+1\big] c_{n-1} = 0 \\
&\qquad \leftrightarrow \quad (n+\varrho) c_n + c_{n-1} = 0 \quad \leftrightarrow \quad c_n = -\frac{c_{n-1}}{n+\varrho}\,.
\end{aligned}$$

(Dabei wurde verwendet, dass für $\varrho = \varrho_{1,2}$ und $n \geqslant 1$ stets $3(n+\varrho-1)+1 \neq 0$ ist.)

Es ergeben sich damit die folgenden Rekursionsformeln:

$$c_n = -\frac{c_{n-1}}{n} \quad (\text{für } \varrho = 0)\,, \qquad\qquad c_n = -\frac{c_{n-1}}{n+\frac{2}{3}} \quad (\text{für } \varrho = \tfrac{2}{3})\,.$$

b) Wählt man $c_0 = 1$, so folgt aus der Rekursionsformel für $\varrho = 0$ mittels vollständiger Induktion $c_n = (-1)^n \frac{1}{n!}$. Dies liefert die Lösung $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} x^{n+0} = e^{-x}$.

Mit $c_0 = 1$ folgt für $\varrho = \frac{2}{3}$ mittels vollständiger Induktion die Formel

$$c_n = (-1)^n \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k+\frac{2}{3}}\,.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung auf $(0,\infty)$ ist also

$$y(x) = a e^{-x} + b \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k+\frac{2}{3}} \right) x^{n+2/3} \qquad (a, b \in \mathbb{R})\,.$$