Diplom–Vorprüfung
Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Bestimmen Sie das Bild $w(S)$ des Parallelstreifens

$$S := \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \operatorname{Re} z < 0\}$$

bei der Abbildung

$$w = \frac{1 + ie^{iz}}{1 - ie^{iz}} \, .$$

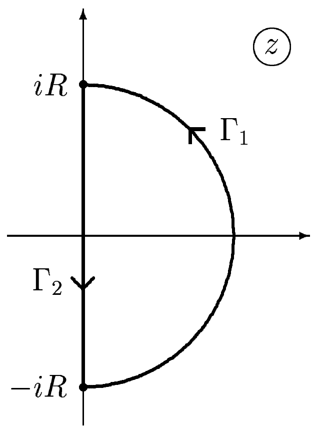
Begründen Sie ihre Antwort genau und fertigen Sie eine Skizze von $w(S)$ an.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Für $R > \sqrt{2}$ sei Γ der mathematisch positiv orientierte Rand des Gebietes

$$G := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0 \text{ und } |z| < R\} \, ;$$

es ist also $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, wobei Γ_1 und Γ_2 gemäß der nebenstehenden Skizze definiert sind.



Die Funktion f ist durch

$$f(z) = \frac{ze^{-z}}{z^4 + 4}$$

erklärt.

a) Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_\Gamma f(z) dz \, .$$

b) Beweisen Sie mittels geeigneter Abschätzungen

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma_1} f(z) dz = 0 \, .$$

c) Zeigen Sie nun, dass das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t \sin t}{t^4 + 4} \, dt$$

existiert, und berechnen Sie den Wert dieses Integrals.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Die Differentialgleichung

$$y(e^{xy} - xy)dx - x(e^{xy} + xy)dy = 0$$

besitzt für $x, y > 0$ einen integrierenden Faktor der Form $\mu(x \cdot y)$.

Bestimmen Sie μ und berechnen Sie für $x, y > 0$ die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung in impliziter Form.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$4xy'' + 2y' + y = 0 \, .$$

a) Mit einem Potenzreihenansatz berechne man die Lösung y_1, für die

$$\lim_{x \to 0} y_1(x) = 1$$

gilt.

b) Stellen Sie die so gewonnene Reihenlösung y_1 für $x > 0$ in geschlossener Form dar.

c) Berechnen Sie nun für $x > 0$ die allgemeine Lösung der vorgegebenen Differentialgleichung.

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

Die Ergebnisse der Vordiplomklausuren hängen ab Mittwoch, dem 9. Oktober, vor dem Sekretariat aus und liegen ab Montag, dem 14. Oktober, unter

`http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~mi1/Schneider/HM/vd-f.html`

im Internet.

Die Klausureinsicht findet für diejenigen, die sich einer mündlichen Nachprüfung stellen müssen, am Dienstag, dem 15. Oktober, von 13.15 bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 (Mathematikgebäude) statt.
Ort und Termin für alle übrigen werden noch bekanntgegeben.

Die Nachprüfungen selbst sind in der Woche vom 21. bis 25. Oktober.