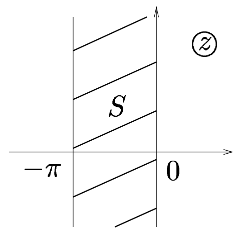
UNIVERSITÄT KARLSRUHE | Herbst 2002
MATHEMATISCHES INSTITUT I | 25.09.2002

Lösung zur Diplomvorprüfung

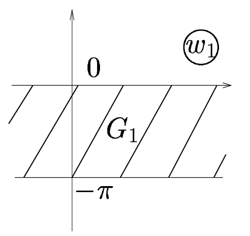
Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Geodäsie und Physik

Aufgabe 1



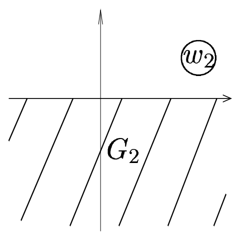
w wird zerlegt in die Teilabbildungen

$$w_1 = iz,\ w_2 = e^{w_1},\ w_3 = \frac{1+iw_2}{1-iw_2} = w$$



i) w_1 ist die Drehung um den Ursprung mit dem Drehwinkel $\frac{\pi}{2}$ in mathematisch positiver Richtung.

Bildgebiet : $\qquad G_1 = \{w_1 | -\pi < \operatorname{Im} w_1 < 0\}$



ii) Mit $w_1 = \xi + i\eta$ gilt

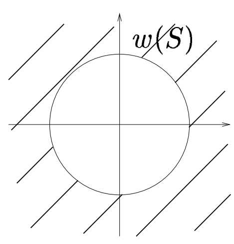
$$w_2 = e^{w_1} = e^{\xi} e^{i\eta} \ \Rightarrow\ |w_2| = e^{\xi},\ \arg w_2 = \eta$$

Wie in der Vorlesung ergibt sich die untere Halbebene als Bildgebiet G_2.

iii) w_3 ist eine Möbius-Transformation mit

$$w_3(0) = 1,\ w_3(-i) = \infty,\ w_3(\infty) = -1,\ w_3(i\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

Da $-i$ in der w_2-Ebene nicht auf der reellen Achse liegt, ist deren Bild ein Kreis, der durch die Punkte 1 und -1 geht. Die imaginäre Achse der w_2-Ebene schneidet die reelle Achse im Ursprung senkrecht. Wegen $w_3(i\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ schneidet der Bildkreis der reellen Achse die reelle Achse der w_3-Ebene in $w_3 = 1$ senkrecht und ist somit der Einheitskreis.



Aus $w_3(-i) = \infty$ folgt, daß das Bildgebiet das Äußere des Einheitskreises ist, es gilt

$$w(S) = \{w \mid |w| > 1\}.$$

Aufgabe 2

$R > \sqrt{2}$, Γ positiv orientierter Rand des Gebietes $G := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0 \,\text{und}\, |z| < R\}$ und $f(z) = \frac{ze^{-z}}{z^4+4}$.
a) Wir berechnen nun die Nullstellen von $z^4 + 4$

$$z_k = \sqrt[4]{4}e^{\frac{i(1+2k)\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{\frac{i(1+2k)\pi}{4}}, \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

f ist ansonsten holomorph, und in dem von Γ berandeten Gebiet liegen die Nullstellen
$z_0 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}} = \sqrt{2}[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}] = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1 + i$
$z_3 = \sqrt{2}e^{\frac{7\pi i}{4}} = \sqrt{2}[\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}] = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1 - i$
Wir verwenden nun den Residuensatz:

$$\oint_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi i(\operatorname{Res}(f, z_0) + \operatorname{Res}(f, z_3).$$

Berechnung der Residuen (einfache Nullstellen des Nenners, Zähler $\neq 0$):
$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{ze^{-z}}{(z^4+4)'}\Big|_{z=z_0} = \frac{ze^{-z}}{4z^3}\Big|_{z=1+i} = \frac{e^{-(1+i)}}{8i} = \frac{-ie^{-i}}{8e}$
$\operatorname{Res}(f, z_3) = \frac{ie^i}{8e}$

$$\oint_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi i\Big(\frac{ie^i}{8e} - \frac{ie^{-i}}{8e}\Big) = -\frac{\pi}{4e}\Big(\frac{e^i - e^{-i}}{2i}\Big)2i = -\frac{\pi i \sin 1}{2e}$$

b) Für $z = Re^{i\varphi} \in \Gamma_1$, $(0 \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi \leq \varphi \leq 2\pi)$ ist $\operatorname{Re} z \geq 0$ und somit $|e^{-z}| = e^{-Re\, z} \leq 1$. Wir können $f(z)$ abschätzen durch

$$|f(z)| \leq \left|\frac{z}{z^4 + 4}\right| = \frac{|Re^{i\varphi}|}{|R^4e^{4i\varphi}| - 4} = \frac{R}{R^4 - 4}$$

und es gilt

$$\Big|\int_{\Gamma_1} f(z)\, dz\Big| \leq \max_{z\in\Gamma_1} |f(z)| \cdot \text{Länge von } \Gamma_1 \leq \tfrac{R}{R^4-4}\pi R \to 0 \quad (R \to \infty)$$

c) Mit dem Majorantenkriterium ergibt sich

$$\left|\frac{t\sin t}{t^4 + 4}\right| \leq \left|\frac{t}{t^4}\right| = \left|\frac{1}{t^3}\right|$$

und für $t \neq 0$ existiert das Integral

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\, dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\, dz = -\frac{\pi i \sin 1}{2e}$$

und es gilt

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_2} f(z) dz = -\frac{\pi i \sin 1}{2e}$$

Die Kurve Γ_2 hat die Parametrisierung $z(t) = -it$, $t \in [-R, R]$.

$$\int_{\Gamma_2} f(z)\, dz = \int_{-R}^{R} f(it)(-i)\, dz = \int_{-R}^{R} \frac{-ite^{-it}}{(-it)^4 + 4}(-i)\, dt = \int_{-R}^{R} \frac{-t(\cos t + i\sin t)}{t^4 + 4}\, dt$$

$$\overset{R\to\infty}{=} -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t\cos t}{t^4 + 4}\, dt - i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t\sin t}{t^4 + 4}\, dt.$$

Daraus folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t\sin t}{t^4+4} = \frac{\pi \sin 1}{2e}.$$

Aufgabe 3

Wir bestimmen den integrierenden Faktor $\mu(x,y)$
$\underbrace{y(e^{xy}-xy)}_{P}\,dx - \underbrace{x(e^{xy}+xy)}_{Q}\,dy = 0$ mit

$$\begin{aligned} P_y &= (e^{xy}-xy)+y(e^{xy}x-x) = e^{xy}+xye^{xy}-2xy = (1+xy)e^{xy}-2xy, \\ Q_x &= -(e^{xy}+xy)-x(e^{xy}y+y) = -e^{xy}-xye^{xy}-2xy = -(1+xy)e^{xy}-2xy. \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung ist somit nicht exakt ($P_y \not\equiv Q_x$)
Wir machen nun die Substitution $t = xy$ und erhalten mit $\varphi(t) = \mu(x \cdot y)$
$\mu_x = \frac{\partial\varphi}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} = \dot\varphi y, \qquad \mu_y = \frac{\partial\varphi}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y} = \dot\varphi x.$
Mit der Exaktheitsbedingung:

$$\mu_y P + \mu P_y = \mu_x Q + \mu Q_x$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot\varphi x[y(e^{xy}-xy)] + \varphi[(1+xy)e^{xy}-2xy] &= \dot\varphi y[-x(e^{xy}+xy)] + \varphi[-(1+xy)e^{xy}-2xy] \\ \dot\varphi(xye^{xy}-x^2y^2+xye^{xy}+x^2y^2) &= \varphi(-e^{xy}-xye^{xy}-2xy-e^{xy}-xye^{xy}+2xy) \\ \dot\varphi(2xye^{xy}) &= \varphi(-2e^{xy}-2xye^{xy}) \\ \dot\varphi(2te^t) &= \varphi(-2e^t-2te^t) \end{aligned}$$

Wir haben nun eine gewöhnliche Differentialgleichung (Trennung der Veränderlichen)

$$\begin{aligned} 2te^t d\varphi &= \varphi(-2e^t-2te)dt \\ \frac{1}{\varphi}\,d\varphi &= \frac{-2e^t-2te^t}{2te^t}\,dt \\ \ln\varphi &= -\ln t - t \\ \varphi &= e^{-\ln t - t} = \frac{1}{te^t}. \end{aligned}$$

Mit dem integrierenden Faktor

$$\varphi(t) = \mu(x,y) = \frac{1}{xye^{xy}}$$

ist die Differentialgleichung

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{y}{e^{xy}}\right)dx - \left(\frac{1}{y}+\frac{x}{e^{xy}}\right)dy = 0$$

exakt. Mit $F_x = \frac{1}{x}-\frac{y}{e^{xy}}$ und $F_y = \frac{1}{y}+\frac{x}{e^{xy}}$ integrieren wir die erste Gleichung nach x und es gilt

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int \frac{1}{x}-\frac{y}{e^{xy}}\,dx + \Phi(y) \\ &= \ln x + e^{-xy} + \Phi(y) \\ \Phi(y) &= F(x,y) - \ln x - e^{-xy}. \end{aligned}$$

Wir differenzieren nun nach y und mit $F_y = \frac{1}{y} + \frac{x}{e^{xy}}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \Phi'(y) &= F_y + xe^{-xy} = -\frac{1}{y} - \frac{x}{e^{xy}} + xe^{-xy} = -\frac{1}{y} \\ \Phi(y) &= -\ln y + C. \end{aligned}$$

Die implizite Lösung der Differentialgleichung ist

$$F(x,y) = \ln x + e^{-xy} - \ln y + C = 0.$$

Aufgabe 4

a) Potenzreihenansatz:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \\ y'(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} m c_m x^{m-1} \\ y''(x) &= \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) c_m x^{m-2} \end{aligned}$$

Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} 4xy'' + 2y' + y &= \sum_{m=2}^{\infty} 4m(m-1)c_m x^{m-1} + \sum_{m=1}^{\infty} 2mc_m x^{m-1} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \\ &= 2c_1 + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{2(2n^2+3n+1)c_{n+1} + c_n\} x^n \\ &= 2c_1 + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{2(n+1)(2n+1)c_{n+1} + c_n\} x^n \\ &= 0 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\lim_{x\to 0} y_1(x) = 1 = c_0 \Rightarrow c_1 = -\frac{1}{2}$$

und die Rekursionsformel (beachte $c_0 = 1$)

$$c_{n+1} = -\frac{c_n}{2(n+1)(2n+1)} \quad (n \geq 1)$$

Folgerung: $n = 1 : c_2 = \frac{1}{4!}, n = 2 : c_3 = \frac{1}{6!}$

Vermutung: $c_n = \frac{(-1)^n}{(2n)!}$ für $n \geq 0$ (beachte $0! = 1$)

Vollständige Induktion: Induktionsanfang ist bereits erbracht!

$$c_{k+1} = -\frac{c_k}{2(k+1)(2k+1)} = \frac{-1}{2(k+1)(2k+1)} \cdot \frac{(-1)^k}{(2k)!} = \frac{(-1)^{k+1}}{(2(k+1))!}$$

Ergebnis:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n$$

An der normierten Form

$$y'' + \frac{1}{2x} y' + \frac{x}{4x^2} y = 0$$

der vorgegebenen Differentialgleichung erkennt man, daß x_0 die einzige Stelle der Bestimmtheit ist; weitere Singularitäten treten nicht auf. Damit konvergiert die gewonnene Reihenentwicklung in $\mathbb{R}$ und stellt dort eine Lösung dar.

b) Für $x > 0$ erhalten wir

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\sqrt{x})^{2n} = \cos\sqrt{x}$$

c) Reduktion der Ordnung (Beachten Sie die Normierung der Differentialgleichung):

Der Ansatz

$$y_2(x) = y_1(x) u(x), \quad v(x) = u'(x)$$

ergibt für v die Differentialgleichung

$$\frac{v'}{v} = -2 \frac{y_1'(x)}{y_1(x)} - \frac{1}{2x}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \ln|v(x)| = -2\ln|y_1(x)| - \frac{1}{2}\ln x \quad \text{(Integrationskonstante} = 0\text{)} \\
&\Rightarrow \quad v(x) = \frac{1}{\sqrt{x} y_1^2(x)} = \frac{1}{\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}} \\
&\Rightarrow \quad u(x) = 2\tan\sqrt{x} \\
&\Rightarrow \quad y_2(x) = 2\tan\sqrt{x} \cdot \cos\sqrt{x} = 2\sin\sqrt{x}
\end{aligned}$$

Allgemeine Lösung für $x > 0$:

$$y(x) = C_1 \cos\sqrt{x} + C_2 \sin\sqrt{x} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$