HM III H2003

Aufgabe 1 Lösung

a) $\sin^2\frac{t}{2} = \left(\frac{1}{2i}\left(e^{i\frac{t}{2}} - e^{-i\frac{t}{2}}\right)\right)^2$

$= -\frac{1}{4}\left(e^{it} + e^{-it} - 2\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos t$

$\rightarrow I_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos(e^{it})\sin^2\frac{t}{2}\,dt$

$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\cos(e^{it}) - \cos(e^{it})\cos t\right]dt$

Setze: $z(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.
Hiermit wird $\cos t = \frac{z^2+1}{2z}$ und $\dot z(t) = iz$,

I_1 kann dann so geschrieben werden:

$I_1 = \frac{1}{\pi}\oint_{|z|=1}\frac{\cos z}{iz}\,dz - \frac{1}{\pi}\oint_{|z|=1}\frac{\cos z\,(1+z^2)}{2z\, i z}\,dz$

Residuensatz

$\stackrel{\text{1}}{=} \frac{2\pi i}{\pi i}\operatorname{Res}(f_1, 0) - \frac{2\pi i}{2\pi i}\operatorname{Res}(f_2, 0)$

mit $f_1(z) = \frac{\cos z}{z}$, $f_2(z) = \frac{(1+z^2)\cos z}{z^2}$.

Wegen $f_1(z) = \frac{1 - z^2\frac{1}{2!} + O(z^3)}{z}$ und $f_2(z) = \cos z + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2!} + O(z)$

hat man $\operatorname{Res}(f_1, 0) = 1$, $\operatorname{Res}(f_2, 0) = 0$. Damit

$\underline{I_1 = 2}$

b) Mit $I_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(e^{it})\cos^2\frac{t}{2}\,dt$ gilt

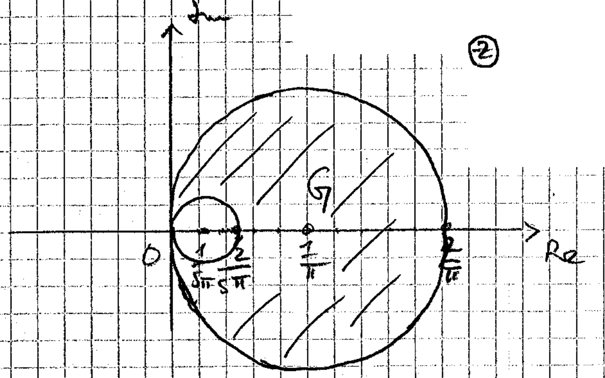
$I_1 + I_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos(e^{it})\,dt \underset{a)}{=} \frac{2}{\pi}\int_{|z|=1}\frac{\cos z}{iz}\,dz$

$= \frac{2}{\pi i}2\pi i\int_{|z|=1}\frac{\cos z}{z}\,dz \stackrel{a)}{=} 4$

Mit a) folgt $\underline{I_2 = 2}$

Aufgabe 2   **Lösung**

a)



$w(z) = \sin\frac{1}{z} = \sin w_1(z)$ mit $w_1(z) = \frac{1}{z}$

1. $w_1(z) = \frac{1}{z}$: Möbiustransformation:

Kreis, Gerade $\}$ → Gerade oder Kreis, Winkel bleiben erhalten.

Abbildung der Randkurven von G:

0 liegt auf $|z-\frac{1}{5\pi}|=\frac{1}{5\pi}$ und $|z-\frac{1}{\pi}|=\frac{1}{\pi}$.

Beide Kreise gehen in Geraden über durch $\pi/2$ und $5\pi/2$. Da $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und die Kreise $\mathbb{R}$ senkrecht schneiden, sind die Bildgeraden parallel und stehen senkrecht auf $\mathbb{R}$:

$|z-\frac{1}{5\pi}|=\frac{1}{5\pi} \xrightarrow{w_1} w_1(t) = \frac{5\pi}{2}+it, \ t\in\mathbb{R}$

$|z-\frac{1}{\pi}|=\frac{1}{\pi} \xrightarrow{w_1} w_1(\tau) = \frac{\pi}{2}+i\tau, \ \tau\in\mathbb{R}$

$\frac{1}{\pi} \in G \xrightarrow{w_1} \pi \in w_1(G)$

$\Rightarrow \quad w_1(G) = \{w_1\in\mathbb{C} \,/\, \frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} w_1 < \frac{5\pi}{2}\}$.

2. $w = \sin w_1$

Abbilden der Randkurven von $w_1(G)$:

$w_1(t) = \frac{\pi}{2}+it$ bzw $w_1(\tau) = \frac{5\pi}{2}+i\tau$

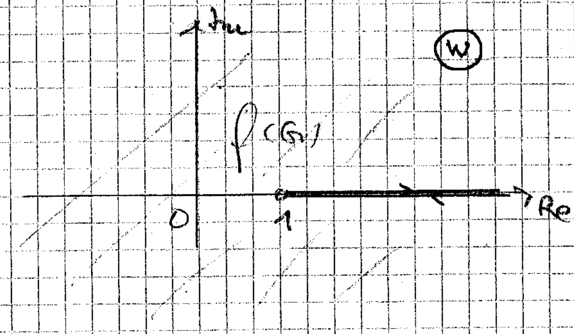
$w(t) = \sin(\frac{\pi}{2}+it) = \cos it = \cosh t$ $t,\tau\in\mathbb{R}$

bzw $w(\tau) = \sin(\frac{5\pi}{2}+i\tau) = \cosh\tau$

Beide beschreiben das 2× durchlaufene Intervall $[1,\infty)$ der reellen Achse ⇒

$f(G) = \mathbb{C} \setminus \{w(t)=\cosh t, \ -\infty<t<\infty\}$

$(= \mathbb{C} \setminus \{w\in\mathbb{R}, \ 1\le w<\infty\})$



b) f ist <u>nicht</u> injektiv: Wegen

$\frac{1}{\pi} > \frac{2}{5\pi}$ und $\frac{1}{2\pi} > \frac{2}{5\pi}$ hat man

$\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi} \in G$, $\underline{\frac{1}{\pi} \neq \frac{1}{2\pi}}$ aber $\underline{f(\frac{1}{\pi}) = f(\frac{1}{2\pi}) = 0}$

Aufgabe 3

$$xy^3 + (1+2x^2y^2)y' = 0$$

a)

$P(x,y) = xy^3 \qquad P_y = 3xy^2$

$Q(x,y) = 1+2x^2y^2 \qquad Q_x = 4xy^2$

Die Gleichung ist nicht exakt.

Bestimmung eines integrierenden Faktors $\mu = \mu(x,y)$:

$$\mu_y P + \mu P_y \overset{!}{=} \mu_x Q + \mu Q_x$$

$$\to \mu (P_y - Q_x) = \mu_x Q - \mu_y P$$

$$\mu (-xy^2) = \mu_x Q - \mu_y P$$

Da $-xy^2/P = -\frac{1}{y}$ nur von y abhängt, gibt es $\mu = \mu(y)$ als Lösung von

$$\mu(y) = \mu'(y)\, y \quad \to \mu(y) = y$$

$\to$ die Gleichung $xy^4 + (y+2x^2y^3)y' = 0$ ist exakt. Sie ist für $y \neq 0$ äquivalent mit der vorgelegten Gleichung. Da $y(x) = 0 \quad \forall x$ Lösung ist, wird ab jetzt $y \neq 0$ vorausgesetzt.

Gesucht ist $F = F(x,y)$ mit $F_x = xy^4$ und $F_y = y + 2x^2y^3$

$\to F(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^4 + \varphi(y) \to y + 2x^2y^3 = 2x^2y^3 + \varphi'(y)$, also

$\varphi(y) = \frac{1}{2}y^2$ oder $F(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^4 + \frac{1}{2}y^2$

Somit sind alle Lösungen der vorgelegten Gleichung in impliziter Form gegeben durch

$$x^2y^4 + y^2 = c \quad , \quad c \text{ konst} \geq 0 \quad \text{beliebig.}$$

(für $c=0$ erhält man die vorher ausgeschlossene Lösung $y(x) = 0 \quad \forall x$)

b) $y(0) = \sqrt{2}$ liefert $c = 2$

$$\to x^2y^4 + y^2 = 2$$

$$\to x = \pm \frac{1}{y^2}\sqrt{2-y^2} \quad , \quad 0 < y \leq \sqrt{2}$$

$$(-\sqrt{2} \leq y < 0)$$

Es gibt zwei Lösungen durch $(0, \sqrt{2})$: (in expliziter Form)

$$x(y) = \pm \frac{1}{y^2}\sqrt{2-y^2} \quad , \quad 0 < y \leq \sqrt{2}.$$

Aufgabe 4 Lösung

$$y(y-1)y'' + y'^2 = 0$$

a) $y(x) = c,\ x \in \mathbb{R}$, für jede Konstante c ist Lösung.

Ab jetzt werden Lösungen $y \neq \text{const}$ gesucht.

1. Schritt: Wir suchen die Lösung in der Form

$$y' = p(y).$$

$\rightarrow$ $y'' = p'(y)\,y' = p'(y)\,p(y)$, d.h. wir suchen

$p = p(t)$ mit
$$t(t-1)p(t)p'(t) + p(t)^2 = 0$$

$y \neq \text{const} \Leftrightarrow p \neq 0 \leadsto t(t-1)\,p'(t) + p(t) = 0$

$t \neq 0, t \neq 1 \Rightarrow p'(t) + \frac{1}{t(t-1)}p(t) = 0 \quad \Big| \cdot \frac{t-1}{t}$

$$\left(\left(1-\frac{1}{t}\right)p(t)\right)' = 0$$

$$\rightarrow \quad \underline{p(t) = c\,\frac{t}{t-1}}$$

2. Schritt: Aus $y' = p(y)$: $y' = c\,\frac{y}{y-1}$ wird

y berechnet:

$$\left(1-\frac{1}{y}\right)y' = c \qquad (*)$$

$$\rightarrow \quad \underline{y - \ln|y| = cx + D} \qquad (c, D \text{ konst}) \qquad (**)$$

$c = 0$ liefert $y = \text{const}$, siehe oben.

Sonst: mit $\frac{1}{c} = \tilde{C}$, $-\tilde{D} = \frac{D}{c}$: erhält man alle Lösung in der (expliziten) Form:

$$\underline{x = x(y) = \tilde{C}y - \tilde{C}\ln|y| + \tilde{D}}, \quad y \neq 0$$

$(0 \neq)\tilde{C}, \tilde{D}$ beliebig, konst.

b) $y(1) = 2$, $y'(1) = 4$ liefert $\tilde{C} = \frac{1}{2}$, $\tilde{D} = \frac{1}{2}\ln 2$

und $\underline{x = x(y) = \frac{1}{2}y + \ln\sqrt{\frac{2}{y}}, \quad y > 0.}$

oder mit $(*)$, $(**)$: $\quad \left(1-\frac{1}{2}\right)4 = \underline{c = 2}$

$$2 - \ln 2 = 2\cdot 1 + D$$

$$\underline{D = -\ln 2}$$

$(**) \leadsto \quad \underline{x(y) = \frac{1}{2}(y - \ln y) + \frac{1}{2}\ln 2}$