UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I

Herbst 2004
30.09.2004

Diplom–Vorprüfung
Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (10 Punkte)

a) Sei
$$v(x,y) = 3x^2y - cy^3 + 2y\ .$$
Für welche $c \in \mathbb{R}$ existiert eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit
$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)\ ?$$
Bestimmen Sie diese Funktion f. Geben Sie diese Funktion auch in der Form $f = f(z)$ an.

b) Bestimmen Sie die gebrochen lineare Abbildung, welche die Punkte
$$z_1 = i\ , \quad z_2 = 2\ , \quad z_3 = -i$$
in die Punkte
$$w_1 = 2\ , \quad w_2 = -4i\ , \quad w_3 = -2$$
abbildet. Bestimmen Sie ferner das Bild des Kreises
$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 17\}$$
unter dieser Abbildung.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Betrachten Sie die Gewöhnlichen Differentialgleichungen
$$\begin{aligned} \dot{x} &= y = f(x,y)\ , \\ \dot{y} &= e^{x-x^3} - 1 = g(x,y)\ . \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die Fixpunkte (x_j, y_j), d.h. die Punkte mit $(\dot{x}, \dot{y}) = (0,0)$.

b) Bestimmen Sie die Linearisierung $\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}$ in den Fixpunkten. Machen Sie Aussagen über die Stabilität der Fixpunkte.

c) Zeichnen Sie in der (x,y)–Ebene die Nulllinien
$$\begin{aligned} N_x &= \{(x,y) \mid \dot{x} = 0\}, \\ N_y &= \{(x,y) \mid \dot{y} = 0\}, \end{aligned}$$
ein und skizzieren Sie in der (x,y)–Ebene das Phasenbild, d.h. zeichnen Sie typische Lösungen in der (x,y)–Ebene ein.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{64+t^6}\,dt$$

mit Hilfe des Residuensatzes.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Gegeben sei eine Funktion f durch

$$f(z) = z^{-3} + 2z^{-2} + z^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} k^3 z^k.$$

a) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist $f(z)$ endlich?

b) Gegeben sei der geschlossene Weg Γ, der die 3 Punkte $\frac{1}{2}i$, $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ und $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$, jeweils durch Geradenstücke verbindet und gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Zeichnen Sie Γ.

c) Berechnen Sie

$$\int_\Gamma f(z)dz,$$

und

$$\int_\Gamma z^4 f(z)dz\ .$$

d) Bestimmen Sie den Konvergenzradius r der Taylorreihe von f um den Entwicklungspunkt $z_0 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

Die **Ergebnisse** der Vordiplomklausuren hängen ab Montag, dem 11. Oktober 2004, vor dem Sekretariat aus und liegen unter

`http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~mi1/Schneider/HM/vd-h.html`

im Internet.

Die **Klausureinsicht** findet für diejenigen, die sich einer **mündlichen Nachprüfung** stellen müssen, am Dienstag, dem 19. Oktober 2004, von 13.15 bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 (Mathematikgebäude) statt.

Die **Allgemeine Klausureinsicht** für alle übrigen findet, am Mittwoch, dem 03. November 2004, von 15.45 bis 17.15 im S 33 (Mathematikgebäude)statt.

Die **Nachprüfungen** selbst sind in der Woche vom 25. bis 29. Oktober 2004.