UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I

Herbst 2004
30.09.2004

Diplom–Vorprüfung
Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie
— L ö s u n g e n —

Aufgabe 1

a) Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} u_x &= v_y = 3x^2 - 3cy^2 + 2, \\ u_y &= -v_x = -6xy. \end{aligned}$$

Die Funktion $f = u + iv$ ist genau dann holomorph, wenn u und v harmonisch sind, d.h. $v_{yy} + v_{xx} = -6cy + 6y = 0 \implies c = 1$.

Integration nach y: $u(x,y) = -3xy^2 + d(x) \overset{\text{C-R Dgl.}}{\implies} u_x = -3y^2 + d'(x) = 3x^2 - 3y^2 + 2 = v_y$

$$\begin{aligned} &\implies d(x) = x^3 + 2x + g, \qquad g \in \mathbb{R} \\ &\implies u(x,y) = -3xy^2 + x^3 + 2x + g \end{aligned}$$

$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) = -3xy^2 + x^3 + 2x + g + i(3x^2y - y^3 + 2y) = z^3 + 2z + g$

b) Bei der Abbildung handelt es sich um eine Drehung um -90^0 mit anschließender Streckung um den Faktor 2, d.h. $w = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}z = -2iz$. Das Bild des Kreises $\{|z| = 17\}$ ist daher $\{|w| = 34\}$.

Aufgabe 2

a) $y = 0\ ,\ e^{x-x^3} = 1$

$$\begin{aligned} &\implies y = 0\ ,\ x - x^3 = 0 \\ &\implies (x_1, y_1) = (0,0),\ (x_2, y_2) = (1,0),\ (x_3, y_3) = (-1,0)\ . \end{aligned}$$

b)

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (e^{x-x^3})(1-3x^2) & 0 \end{pmatrix}$$

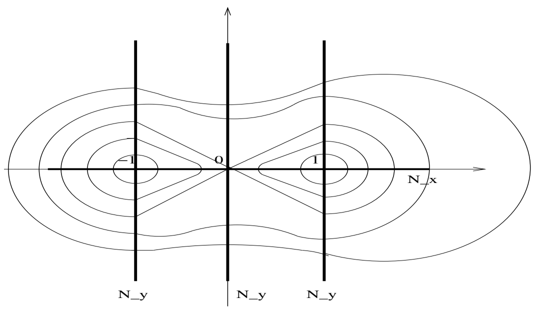
$$(x_1, y_1): \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad EW: \pm 1$$

$\implies$ linear und nichtlinear instabil

$$(x_2, y_2) \text{ und } (x_3, y_3): \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad EWe: \pm\sqrt{2}i$$

$\implies$ linear stabil, nichtlinear keine Aussage c)

$$N_x = \{y = 0\}$$
$$N_y = \{x = 0, \pm 1\}$$



Aufgabe 3

Der Integrand ist gerade, wir berechnen $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{64+t^6}}_{Q}\, dt.$

Nullstellen von Q in der komplexen Ebene:

$64 + z^6 = 0 \iff z^6 = -64 = 64e^{\pi i + 2k\pi i} \implies z_k = 2e^{\frac{\pi i + 2k\pi i}{6}},\ k = 0, 1, 2, 4, 5,$

in der oberen Halbebene liegen:

$$z_0 = 2e^{\frac{\pi}{6}i}\ , \quad z_1 = 2e^{\frac{\pi}{2}i}\ , \quad z_2 = 2e^{\frac{5\pi}{6}i}\ .$$

Da

$$\mathrm{Res}\,(\frac{1}{Q}, z_k) = \frac{1}{6z_k^5},$$

ist

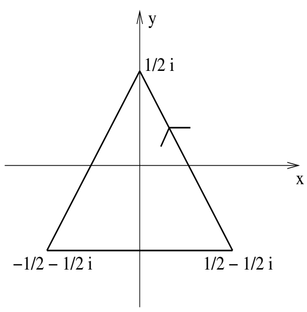
$$I \;=\; \frac{\pi i}{192}(\frac{1}{e^{\frac{\pi}{6}i}} + \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}i}} + \frac{1}{e^{\frac{5\pi}{6}i}}) = \frac{\pi i}{192}(\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} + \frac{1}{i} + \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}) = \frac{\pi i}{192}(-2i) = \frac{\pi}{96}$$

Aufgabe 4

a) $\lim\limits_{k\to\infty} |\dfrac{(k+1)^3}{k^3}| = 1$, Quotientenkriterium $\implies |z| < 1$

Für $|z| = 1$ ist k^3 keine Nullfolge, und somit auch nicht konvergent

b)



c) $\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res} f(0) = 2\pi i, \quad \int\limits_{\Gamma} z^4 f(z)\,dz = 0$, da $z^4 f(z)$ analytisch für $|z| < 1$.

d) Es ist $|z_0| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ der Abstand zum Ursprung und somit ist $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = r$ der gesuchte Konvergenzradius