UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I

Herbst 2005
27.09.2005

Diplom–Vorprüfung
Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$v(x, y) = e^y \cos x\ .$$

a) Zeigen Sie, dass v Imaginärteil einer holomorphen Funktion $f(z)$ ist.

b) Bestimmen Sie $f(z)$ derart, dass $f(0) = i$ gilt.

c) Bilden Sie das Gebiet
$$Q = (0, \frac{\pi}{2}) \times (0, \frac{\pi}{2})$$
durch
$$w(z) = ie^{-iz}$$
ab. Skizzieren Sie Q und $w(Q)$.

<u>Lösung:</u>

a) $v_{xx} = -e^y \cos x\,,\ v_{yy} = e^y \cos x$
$\Rightarrow v$ ist harmonisch.

b) Bestimmung der zugehörenden konjugiert harmonischen Funktion $u(x,y)$ mit Hilfe der Cauchy-Riemannschen Dglen.:

$u_x = v_y = e^y \cos x \Rightarrow u = e^y \sin x + c(y)$
$\Rightarrow u_y = e^y \sin x + c'(y) = -v_x = e^y \sin x$
$\Rightarrow u(x,y) = e^y \sin x + C \quad (C = \text{const.})$

Es ergibt sich

$$
\begin{aligned}
f(z) &= e^y \sin x + i e^y \cos x + C \\
&= i e^y (\cos x - i \sin x) + C \\
&= i e^y e^{-ix} + C = i e^{-i(x+iy)} + C \\
&= i e^{-iz} + C.
\end{aligned}
$$

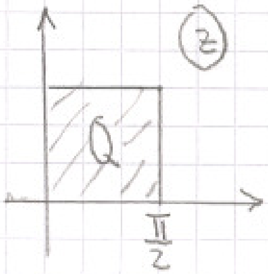
$$f(0) = i \Rightarrow C = 0$$

Lösung: $f(z) = i e^{-iz}$.

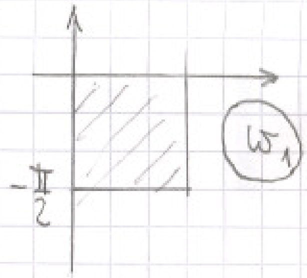
c) Wir faktorisieren w gemäss

$$w_1 = -iz \,, \; w_2 = e^{w_1} \,, \; w = i w_2 .$$

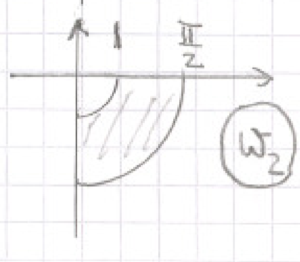
w_1 : Drehung um $\frac{\pi}{2}$ in mathematisch positiver Richtung.

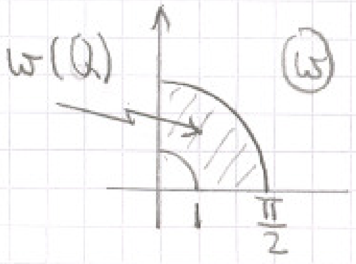


w_2 : $w_2(w_1(Q))$ bestimmen wir aus den in der Vorlesung bewiesenen Abbildungseigenschaften der Exponentialfunktion.



$w = i w_2$: Drehung um $\frac{\pi}{2}$ in mathematisch positiver Richtung.





Aufgabe 2 (10 Punkte)

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$I = \int_C \frac{z^4 - 5z^3 + 11z^2 - 17z + 12}{z^3 - 6z^2 + 11z - 6}\, dz\,.$$

Hierbei ist C der einmal mit mathematisch positiver Orientierung durchlaufene Kreis $\{z \mid |z| = e\}$.

Lösung:

Polynomdivision:

$$\frac{z^4-5z^3+11z^2-17z+12}{z^3+6z^2+11z-6} = z+1+\frac{6z^2-22z+18}{z^3-6z^2+11z-6}$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{6z^2-22z+18}{(z-1)(z-2)(z-3)} = \frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-2}+\frac{C}{z-3}\,.$$

Multiplikation mit $(z-1)$ und anschliessender Einsetzen von $z=1$ ergibt $A=1$. Analog $B=2$, $C=3$.

$$\Rightarrow \quad I = \int_C (z+1)\,dz + \int_C \frac{dz}{z-1} + 2\int_C \frac{dz}{z-2} + 3\int_C \frac{dz}{z-3}$$

Nach dem Cauchyschen Integralsatz verschwinden das erste und vierte Integral, da die Integranden in $\{|z|<e\}$ holomorph sind. Mit der Cauchyschen Inte- berechnet man

$$I = 2\pi i \cdot 1 + 2\cdot 2\pi i \cdot 1 = 6\pi i\,.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$x^3y - xy^2 - x^2yy' = 0\ .$$

a) Bestimmen Sie für diese Differentialgleichung einen integrierenden Faktor der Form $\mu(x,y) = \varphi(xy)$.

b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung in expliziter Form $y(x)$.
(**Hinweis:** Es ist $\mu(x,y) = \frac{1}{xy}$) .

c) Bestimmen Sie die Lösungen des Anfangswertproblems $y(0) = 0$.

Lösung:

a) φ ist so zu bestimmen, daß die Differential-gleichung

$$\varphi(xy)(x^3y - xy^2)\,dx + \varphi(x,y)(-x^2y)\,dy = 0$$

exakt ist:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi(x^3y - xy^2)\right)$$

$$= x\varphi'(x^3y - xy^2) + \varphi(x^3 - 2xy)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(-\varphi xy^2) = -y\varphi' x^2y - 2\varphi xy$$

Es folgt

(*) $$x^4y\varphi' + x^3\varphi = 0.$$

i) $xy = 0$

i,1) $x = 0$: Keine Lösung der Form $y(x)$

i,2) $y = 0$: Hier liegt die singuläre Lösung $y = 0$ vor.

ii) $xy \neq 0$: Aus (*) ergibt sich

$$xy\,\varphi'(xy) + \varphi(xy) \xrightarrow[t:=xy]{} t\varphi' + \varphi = 0$$

$$\xrightarrow[\text{z.B.}]{} \varphi(t) = \frac{1}{t} \Rightarrow \mu(x,y) = \frac{1}{xy} \text{ ist int.-Faktor}$$

b) Nach Multiplikation mit dem integrierenden Faktor ist die DGL.

$$(x^2 - y)\,dx - x\,dy = 0$$

zu lösen:

$$F_x = x^2 - y \Rightarrow F = \frac{1}{3}x^3 - xy + c(y)$$

$$\Rightarrow F_y = -x + c'(y) = -x \Rightarrow c'(y) = 0$$

$$\Rightarrow F(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - xy + C \text{ ist Stammfunktion}$$

Allgemeine Lösung

$$y(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{c}{x} \quad (c = \text{const.},\ x \neq 0)$$

c) Aus der allgemeinen Lösung ergibt sich für $c = 0$ die Lösung $y(x) = \frac{1}{3}x^2$ des Anfangswertproblems.

Außerdem erfüllt die singuläre Lösung $y = 0$ die Anfangsbedingung.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y'' - 2xy' + 8y = 0\,.$$

a) Begründen Sie genau, wieso jede Lösung $y(x)$ in der Umgebung von $x_0 = 0$ in eine konvergente Potenzreihe entwickelt werden kann und geben Sie den Konvergenzradius dieser Reihen an.

b) Berechnen Sie mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes mit Entwicklungszentrum $x_0 = 0$ die Lösung $y(x)$, für die

$$y(0) = \frac{1}{4}\,,\; y'(0) = 0$$

gilt.

Lösung:

a) Die Koeffizientenfunktionen $-2x$ und 8 der vorgegebenen linearen DGL. sind Polynome und damit bezüglich $x_0 = 0$ regulär analytische Funktionen mit dem Konvergenzradius ∞. Daher besitzen alle Lösungen Reihenentwicklungen um $x_0 = 0$ mit Konvergenzradius ∞.

b) Potenzreihenansatz:

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j,\quad y'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j c_j x^{j-1},\quad y'' = \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) c_j x^{j-2}$$

$$\Longrightarrow \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) c_j x^{j-2} + \sum_{j=1}^{\infty} (-2jc_j) x^j + \sum_{j=0}^{\infty} 8 c_j x^j$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} x^k + 8c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (-2k+8) c_k x^k$$

$$= 2c_2 + 8c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \big((k+2)(k+1) c_{k+2} + (-2k+8) c_k\big) x^k$$

$$= 0\,.$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$c_2 + 4c_0 = 0$$

und die Rekursionsformel

$$c_{k+2} = \frac{2k-8}{(k+2)(k+1)}\, c_k\,,\ k \geq 1.$$

Anfangsbedingungen:

$$y(0) = \frac{1}{4} = c_0 \Rightarrow c_2 = -1$$

$$y'(0) = 0 = c_1 \Longrightarrow c_{2n+1} = 0\,,\ n \in \mathbb{N}$$ (nach der Rekursionsformel).

Weiter folgt aus der Rekursionsformel

$$k = 2:\ c_4 = -\frac{4}{4\cdot 3}(-1) = \frac{1}{3}$$

$$k = 4:\ c_6 = 0$$

$$\Longrightarrow c_{2n} = 0\,,\ n \geq 4.$$

Lösung:

$$y(x) = \frac{1}{4} - x^2 + \frac{1}{3}x^4.$$