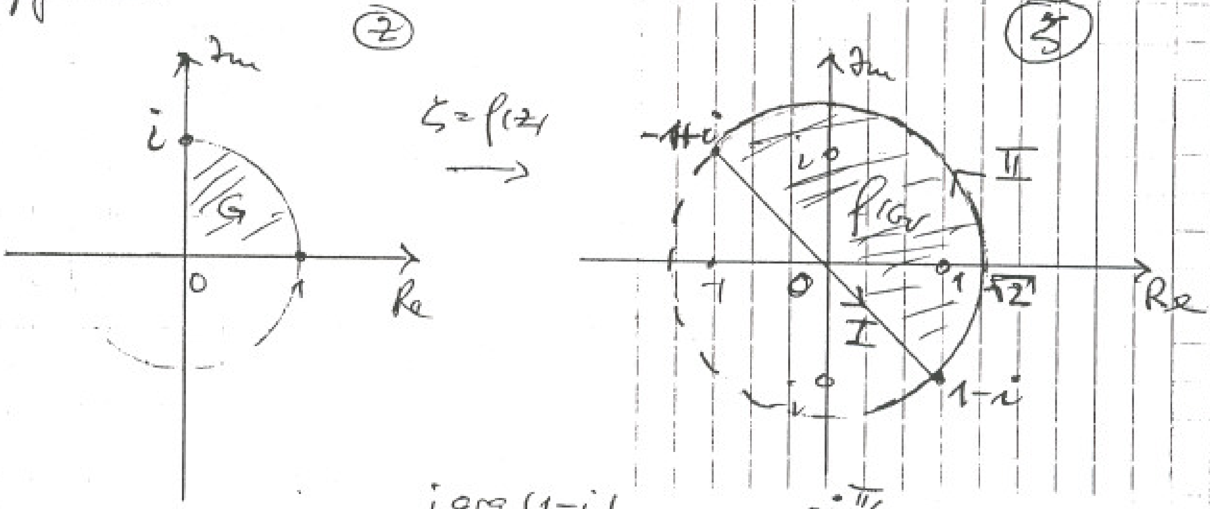
Aufgabe 1

a)



$$1-i = |1-i|\, e^{i \arg(1-i)} = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}$$

Durch f wird G auf die obere Hälfte des Einheitskreises abgebildet (z^2), mittels $\sqrt{2}$ gestreckt ($|1-i| = \sqrt{2}$) und im Uhrzeigersinn um $\pi/4$ gedreht ($e^{-i\pi/4}$).

b) $\underline{H = f(G)}$. Man rechnet nach: $\underline{T = T^{-1}}$.

$w = T^{-1}(z) = \dfrac{z(-1-i)+2i}{z+1+i}$ ist eine Möbiustransformation,

die die Teile I und II des Randes von H (Gerade / Kreis) abbildet auf Geradenstücke und Kreisstücke wie folgt:

II ist Teil des Kreises $|z| = \sqrt{2}$ durch $-1-i$. Da $T^{-1}(-1-i) = \infty$, geht II über in die Gerade durch $T^{-1}(1-i) = i-1$ und $T^{-1}(-1+i) = 1-i$ durchlaufen von $i-1$ in Richtung $1-i$.

Das Geradenstück I liegt auf einer Geraden nicht durch $-1-i$: I geht über in den Kreis durch $T^{-1}(-1+i) = 1-i$, $T^{-1}(0) = 1+i$, $T^{-1}(1-i) = i-1$, durchlaufen in dieser Reihenfolge.

Damit ist $T^{-1}(H) = H$. (II $\to$ I, I $\to$ II)

c) $T(f(G)) = T(H) = H = f(G)$.

Aufgabe 2

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z-1)^2-1} = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z(z-2)}$$ hat die

Singularitäten $\underline{z_1 = 2}$ (Polstelle 1. Ordnung) und $\underline{z_2 = 0}$ (wesentlich)

z_1, z_2 liegen in $\{z \mid |z| < 3\}$. Nach dem Residuensatz gilt

$$\oint_{|z|=3} f(z)\,dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f; 2) + \operatorname{Res}(f; 0) \right).$$

$$\underline{\operatorname{Res}(f; 2)} = \lim_{z \to 2} (z-2) f(z) = \underline{\frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}}}$$

$\operatorname{Res}(f; 0)$ wird mittels der Laurentreihe bestimmt:

$$f(z) = -\frac{1}{2}\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} e^{\frac{1}{z}} \underset{0<|z|<2}{=} -\frac{1}{2}\frac{1}{z}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{1}{z^k}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{2^{k-j}}\frac{1}{j!} z^{k-2j}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{z}\left(\cdots + \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^j}\frac{1}{j!}\right)}_{=e^{\frac{1}{2}}} z^0 + \cdots \right)$$

$\rightarrow$ $\underline{\operatorname{Res}(f; 0) = -\frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}}}$, so dass wir

schließlich erhalten haben:

$$\underline{\oint_{|z|=3} f(z)\,dz} = 2\pi i \left(\frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}} \right) \underline{= 0}$$

HMIII VD H2006

Aufgabe 3

a) $x(y)=0 \quad \forall y$ ist Lösung. Ab jetzt sei $x \neq 0$.

Die DGL $(4-4x^2-y^2)dx - 3xy\,dy = 0$ mit

$f(x,y) = 4-4x^2-y^2$, $g(x,y) = -3xy$ und

$f_y = -2y$, $g_x = -3y$ ist nicht exakt. Da $\frac{f_y-g_x}{g} = -\frac{1}{3x}$

nur von x abhängt, gibt es einen integrierenden Faktor

$\mu=\mu(x)$: Aus $(\mu(x)f(x,y))_y = (\mu(x)g(x,y))_x$ folgt

$\mu'(x) = -\frac{1}{3x}\mu(x)$. Also $\mu(x) = x^{-\frac{1}{3}}$. Die DGL

$$(\mu f)dx + (\mu g)dy = (4x^{-\frac{1}{3}} - 4x^{+\frac{5}{3}} - y^2 x^{-\frac{1}{3}})dx + (-3x^{\frac{2}{3}}y)dy = 0$$

ist exakt. Ein Potential $F=F(x,y)$ berechnet sich aus

$F_x = 4x^{-\frac{1}{3}} - 4x^{+\frac{5}{3}} - y^2x^{-\frac{1}{3}}$ und $F_y = -3x^{\frac{2}{3}}y$

$\downarrow F = -\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}y^2 + \varphi(x)$

$\varphi'(x) = 4x^{-\frac{1}{3}} - 4x^{\frac{5}{3}} \quad \leftarrow$

$\downarrow$

$\varphi(x) = 6x^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}x^{\frac{8}{3}}$

also: $F(x,y) = -\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}y^2 + 6x^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}x^{\frac{8}{3}}$.

Durch $F(x,y) = C$ (konst) werden implizit die Lösungen der DGL gegeben: $x^{2/3}(6-\frac{3}{2}y^2) - 3/2\, x^{8/3} = C$

b) $y(8)=1$ ergibt $C = -6\cdot 61$. Die Lösungen durch $(8,1)$ werden also implizit durch

$$x^{2/3}(6-\tfrac{3}{2}y^2) - 3/2\, x^{8/3} = -6\cdot 61$$

gegeben.

Aufgabe 4

<u>1. Schritt</u>: Berechne $p = p(t)$, so dass für Lösungen y gilt $y' = p(y)$.

Mit $y = t$, $y' = p(t)$, $y'' = p(t)\dot{p}(t)$ geht die DGL über in

$$t p \dot{p} + t^2 p - p^2 = 0$$

Die Nebenbedingungen schließen $t = 0$ ($y = 0$) aus und auch $p = 0$, denn das würde $y = \text{const}$ bedeuten

$$\underline{\dot{p} - \frac{1}{t} p + t = 0} \xrightarrow[\text{inh. 1. Ordng HM I}]{\text{linear}} \underline{p(t) = c_1 t - t^2,\ c_1 \text{ konst}}$$

<u>2. Schritt</u>: Aus $p(y) = \underline{y' = c_1 y - y^2}$ ist y zu berechnen.

$c_1 = 0$ ist nicht möglich, da $y' = -y^2$: $y(x) = \frac{1}{x + \text{Const}}$ liefert, $y(0) = 2$ ist nicht erfüllbar

Trennung $\rightarrow$ der Variablen

$$1 = y' \frac{1}{c_1 y - y^2} = y' \frac{1}{c_1}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y - c_1}\right)$$

$$\rightarrow \underline{\frac{1}{c_1} \ln\left|\frac{y}{y - c_1}\right| = x + c_2,\ c_2 \text{ konst.}}$$

$y(0) = 2$ ist höchstens durch $\underline{c_1 = 2}$ erfüllbar.

$$\rightarrow \frac{1}{2} \ln\left|\frac{y}{y-2}\right| = x + c_2$$

$$y(0) = 1 \rightarrow c_2 = 0 \quad \rightarrow \left|\frac{y}{y-2}\right| = e^{2x} \rightarrow \frac{y}{y-2} = \pm e^{2x}$$

Wegen $y(0) = 1$ also: $\frac{y}{y-2} = -e^{+2x}$

$$\rightarrow \underline{y(x) = \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}}}$$