Höhere Mathematik III

Lösungen zur Vordiplomklausur Herbst 2007

1

a) $G = \{ z \in \mathbb{C} : \min\limits_{k=1,\dots,4} |z - z_k| \leq \sqrt{2} \}$

$= \bigcup\limits_{k=1,\dots,4} \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_k| \leq \sqrt{2} \}$

$H = \{ z \in \mathbb{C} : |z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| < 2 \}$

$= \{ z \in \mathbb{C} : |\underbrace{\operatorname{Re} z}_{=:x}| + |\underbrace{\operatorname{Im} z}_{=:y}| < 1 \}$

Abb. 1

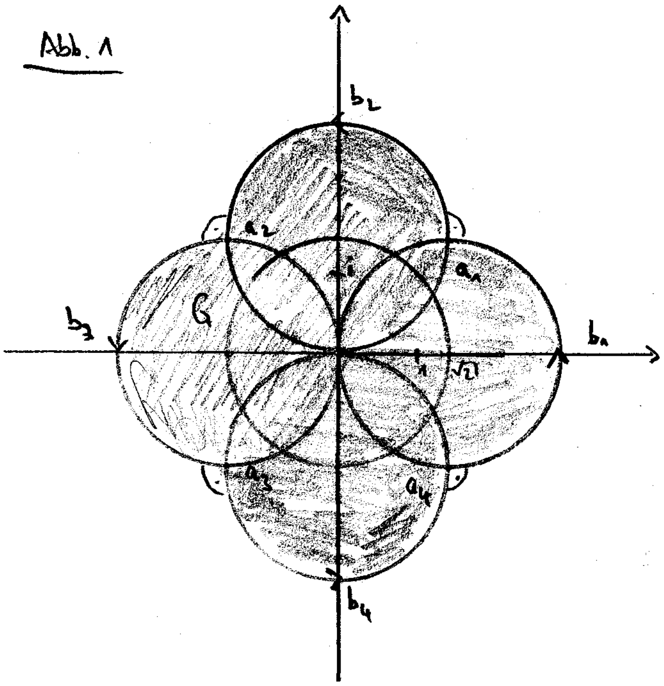
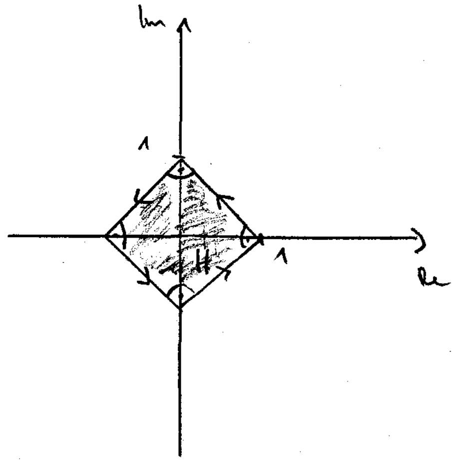


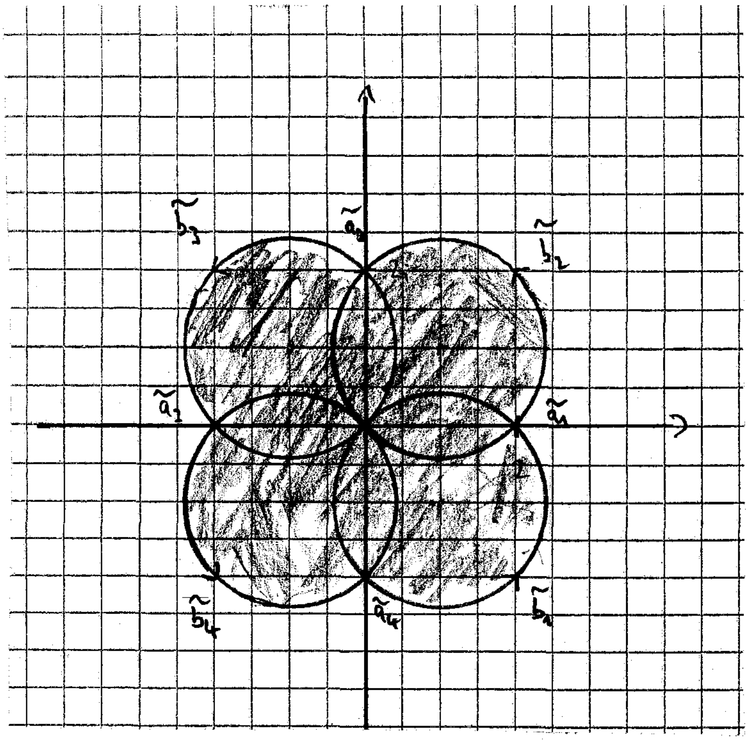
Abb. 2



b) Da die gesuchte Abbildung eine Möbiustransformation sein soll, muss $T(\partial G) = \partial H$ gelten. Ebenso müssen Winkel und Orientierung erhalten bleiben.

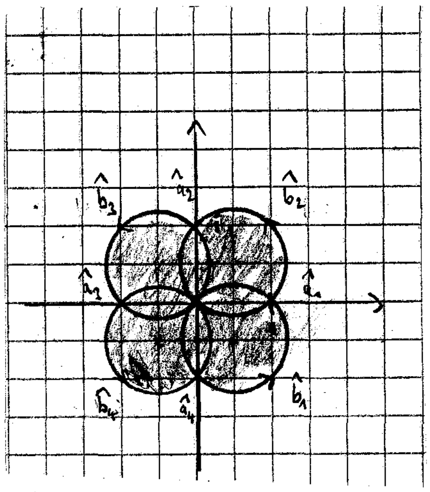
Mittels der Abbildung $T_1(z) = e^{-\frac{\pi}{4} i} \cdot z$ geht Abb. 1 über in

Abb. 3



Mittels der Abbildung $T_2(z) = \frac{1}{2} z$ wird daraus

Abb. 4



und selbstverständlich liefert $T_3(z) = \frac{1}{z}$ wegen der Kreistreue

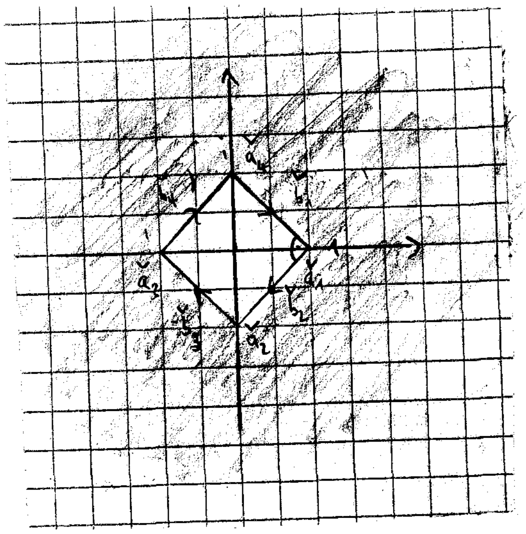
und

$$T_3(1) = 1 \;,\; T_3(-1) = -1 \;,\; T_3(i) = -i \;,\; T_4(-i) = i$$

$$T_3(1+i) = \frac{1}{2}(1-i) \;,\; T_3(1-i) = \frac{1}{2}(1+i) \;,\; T_3(-1+i) = \frac{1}{2}(-1-i)$$

$$T_3(-1-i) = \frac{1}{2}(-1+i)$$

die Abb. 5



Offensichtlich ist nun $T(z) = T_3 \circ T_2 \circ T_1(z)$ die Möbiustransformation, die $T(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) = 1$ und $T(G) = \hat{\mathbb{C}} \setminus H$ erfüllt.

T ist gegeben durch
$$T(z) = 2e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{1}{z}.$$

②

a) Für $z \neq 0$ ist $f(z) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{z^4}} = \dfrac{z^4}{z^4-1}$

$$= \frac{z^4}{(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)}.$$

Somit liegt an der Stelle $z=0$ eine hebbare Singularität vor ($\mathrm{Res}(f,0) = 0$), sowie an den Stellen $1, -1, i, -i$ Polstellen 1. Ordnung. Sämtliche Singularitäten liegen innerhalb des Kreises $|z|=2$, und der Residuensatz liefert:

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{1-\frac{1}{z^4}}\,dz = 2\pi i \Big[\mathrm{Res}(f,0) + \mathrm{Res}(f,1) + \mathrm{Res}(f,-1) + \mathrm{Res}(f,i) + \mathrm{Res}(f,-i) \Big]$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{einfache}\\ \text{Polstellen}}}{=} 2\pi i \Big[0 + \frac{z^4}{4z^3}\Big|_{z=1} + \frac{z^4}{4z^3}\Big|_{z=-1} + \frac{z^4}{4z^3}\Big|_{z=i} + \frac{z^4}{4z^3}\Big|_{z=-i} \Big]$$

$$= \frac{\pi i}{2}\left[1-1+i-i\right] = 0.$$

b) Singularitäten von f: $\cosh(z^2) - 1 \overset{!}{=} 0$.

$$\Leftrightarrow \quad e^{z^2} + e^{-z^2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2z^2} - 2e^{z^2} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (e^{z^2} - 1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{z^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad z^2 = 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow \quad |z| = \sqrt{|k|\,2\pi} = \sqrt{|k|}\sqrt{2\pi} > 2 \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}.$$

Folglich befindet sich die einzige Singularität von f innerhalb des Kreises $|z|=2$ an der Stelle $z=0$.

Für $z \in \{ z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 2 \}$ gilt

$$f(z) = \frac{z^4}{\cosh(z^2) - 1} = \frac{z^4}{\left(1 + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^8}{4!} + \dots\right) - 1}$$

$$= \frac{z^4}{z^4} \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^8}{6!} + \dots}$$

und daher liegt an der Stelle $z = 0$ eine hebbare Singularität vor.

Somit liefert der Residuensatz

$$\int_{|z|=2} \frac{z^4}{\cosh(z^2) - 1} \, dz = 0 .$$

c) Nach der Cauchyschen Integralformel (Voraussetzungen erfüllt!) gilt

$$\int_{|z|=2} \frac{e^{\pi i \sinh z} + 4}{(z - \frac{1}{2})^2} \, dz = 2\pi i \cdot \left(e^{\pi i \sinh z} + 4 \right)'\Big|_{z = \frac{1}{2}}$$

$$= 2\pi i \cdot \pi i \cosh(\tfrac{1}{2}) \cdot e^{\pi i \sinh(\frac{1}{2})} .$$

③ a) Mit $P(x,y) = xy^2 + y$, $Q(x,y) = -x \ln x$ $\quad (x>0,\ y\in\mathbb{R})$

gilt

$$\frac{\partial}{\partial y} P(x,y) = 2xy + 1 \neq -\ln x - 1 = \frac{\partial}{\partial x} Q(x,y).$$

Die Dgl. ist also nicht exakt.

b) Ansatz für integrierenden Faktor: $\mu(x,y) = \frac{1}{x} y^a$ liefert

$$(\mu P)_y = \left(y^{2+a} + y^{1+a} \cdot \frac{1}{x} \right)_y$$

$$= (2+a)\, y^{1+a} + (1+a)\, y^a \cdot \frac{1}{x},$$

sowie $(\mu Q)_x = (-\ln x \cdot y^a)_x = -\frac{1}{x} y^a$.

Da μ integrierender Faktor sein soll, muss $(\mu P)_y = (\mu Q)_x$ gelten, also

$$(2+a)\, y^{1+a} + (1+a)\, y^a \frac{1}{x} = -\frac{1}{x} y^a,$$

und dies ist für $a = -2$ erfüllt.

c) Neue (exakte) Dgl. $\quad \mu P\, dx + \mu Q\, dy = 0$,

also

$$\left(1 + \frac{1}{xy}\right) dx + \left(-\ln x \cdot \frac{1}{y^2}\right) dy = 0.$$

Gesucht ist eine Funktion $F = F(x,y)$ mit

$F_x = \mu P$ sowie $F_y = \mu Q$.

Die Funktion $\quad F(x,y) = x + \ln x \cdot \frac{1}{y} \quad (x>0,\ y\neq 0)$

erfüllt dies.

Man beachte: Ist $I \subseteq (0, \infty)$ ein Intervall, so ist die Funktion $y: I \to \mathbb{R}$, $y(x) = 0$, eine Lösung der Dgl.

Andere Lösungen erhalten wir in impliziter Form mittels

$$F(x,y) = x + \ln x \cdot \frac{1}{y} = c \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}.$$

Löst man nach y auf, so erhält man

$$y = \frac{\ln x}{c - x}.$$

Für die Lösung durch den Punkt $(e, \frac{1}{e})$ muss also

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{c-e}, \quad \text{also } c = 2e, \text{ erfüllt sein.}$$

Daher ist $y(x) = \frac{\ln x}{2e - x}$ $(x \in (0, 2e))$

eine Lösung, die durch den Punkt $(e, \frac{1}{e})$ verläuft, denn y erfüllt wegen

$$y'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2e-x} + \frac{\ln x}{(2e-x)^2} \quad (x \in (0, 2e))$$

die Dgl. $xy^2 + y - x \ln x \, y' = 0$.

NR: $$x \frac{(\ln x)^2}{(2e-x)^2} + \frac{\ln x}{2e-x} - x \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} \frac{1}{2e-x} - x \ln x \cdot \frac{\ln x}{(2e-x)^2} = 0$$

(4) Ansatz: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Dann ist

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{und} \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Einsetzen in die Dgl. ergibt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 4 a_n x^n = -2 + 6x^2,$$

also

$$(*) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} + n a_n - 4 a_n\right] x^n + (2a_2 - 4a_0) = -2 + 6x^2.$$

Wegen $a_0 = y(0) = 2$ und $a_1 = y'(0) = 0$ erhalten wir aus $(*)$:

a) $2a_2 - 4\underbrace{a_0}_{=2} = -2$, also $a_2 = 3$,

b) $3 \cdot 2\, a_3 + \underbrace{a_1 - 4a_1}_{=0} = 0$, also $a_3 = 0$,

c) $4 \cdot 3\, a_4 + 2a_2 - 4a_2 = 6$, also $a_4 = 1$,

d) $n \geq 3$: $(n+2)(n+1)\, a_{n+2} + (n-4)\, a_n = 0$, also

$$\binom{*}{*} \quad a_{n+2} = \frac{4-n}{(n+2)(n+1)} a_n$$

Wegen $a_3 = 0$, folgt somit $a_{2k+1} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$.

Weiter ist $a_6 = \frac{4-4}{6 \cdot 5} a_4 = 0$, und wieder folgt aus $\binom{*}{*}$

$$a_{2k} = 0 \quad (k = 3, 4, 5, \dots).$$

Somit ist die gesuchte Lösung des Anfangswertproblems das Polynom

$$y(x) = 2 + 3x^2 + x^4.$$