HM III Klausur Sept. 2008 Lösungen

Aufgabe 1

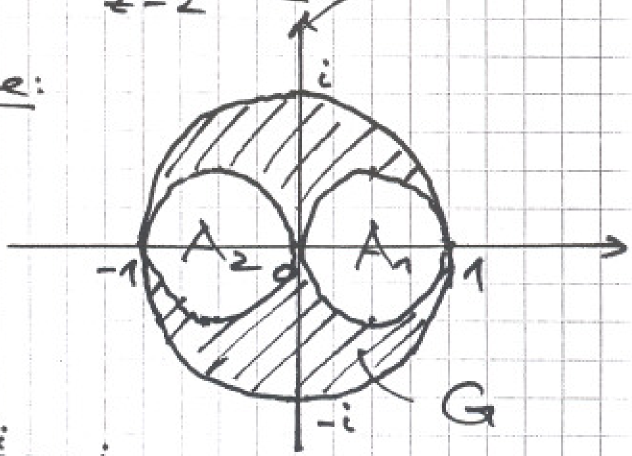
(a) Die allgemeine Form ist $T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ mit $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ und $ad-bc\neq 0$. Wegen $T(2)=\infty$ ist $2c+d=0$, wegen $T(\infty)=2$ ist $\frac{a}{c}=2$, und wegen $T(1)=1$ ist $a+b=c+d$. Insbesondere ist $c\neq 0$, und für $c=1$ erhält man $a=2$, $d=-2$, $b=-3$, also

$$T(z)=\frac{2z-3}{z-2}=\frac{2(z-2)+1}{z-2}=\frac{1}{z-2}+2$$

(b) Bestimme zunächst $T(\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\})$, $T(\partial A_1)$ und $T(\partial A_2)$. Es ist $T(1)=\infty$, $T(-1)=0$ und $T(0)=-1$,

$$T(i)=\frac{i+1}{i-1}=\frac{(i+1)^2}{(i-1)(i+1)}=\frac{1+i^2+2i}{-2}=-i.$$

Skizze:



Wegen der Kreistreue von T werden die beiden Kreise $\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$ und $\{z\in\mathbb{C}:|z-\frac{1}{2}|=\frac{1}{2}\}$ auf parallele Geraden abgebildet und der Kreis $\{z\in\mathbb{C}:|z+\frac{1}{2}|=\frac{1}{2}\}$ wird auf einen Kreis abgebildet.

Die Gerade $T(\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\})$ verläuft durch $T(-1)=0$ und $T(i)=-i$, ist also die imaginäre Achse.

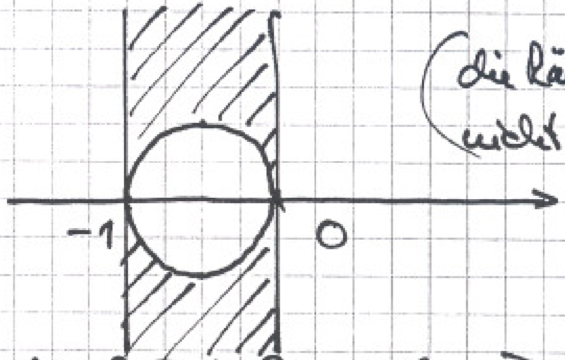
Die Gerade $T(\{z\in\mathbb{C}:|z-\frac{1}{2}|=\frac{1}{2}\})$ ist somit parallel zur imaginären Achse und verläuft durch $T(0)=-1$.

Der Kreis $T(\{z\in\mathbb{C}:|z+\frac{1}{2}|=\frac{1}{2}\})$ verläuft durch $T(-1)=0$ und $T(0)=-1$. Wegen der Winkeltreue verläuft er in diesen Punkten tangential zu den obigen Geraden. Somit ~~ka~~ wird er auf sich selbst abgebildet. Wegen $T(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{3}$ und der Gebietstreue

folgt $T(A_2) = A_2$. Ebenso folgt aus $T(2) = 3$, dass $T(\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}) = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w \geq 0\}$, und aus $T(\frac{1}{2}) = -3$ folgt $T(A_1) = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w \leq -1\}$.
Somit ist

$$T(G) = \{w \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} w < 1\} \setminus \{w \in \mathbb{C} : |w + \tfrac{1}{2}| \leq \tfrac{1}{2}\}$$

Skizze:



(die Ränder gehören nicht dazu!)

Aufgabe 2

(a) Zähler und Nenner sind auf $\mathbb{C}$ holomorph. Die einzige Nullstelle $z_0 = 0$ des Nenners ist vierfach. Wegen $e^z + e^{-z}\big|_{z=0} = 2 \neq 0$ ist $z_0 = 0$ ~~einfache~~ Polstelle der Ordnung 4.

Setzt man $f(z) = e^z + e^{-z}$, so ist nach der Cauchyformel für Ableitungen

$$\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^4}\,dz = 2\pi i \frac{f'''(z)}{3!}\bigg|_{z=0}.$$ Wegen $f^{4} = f$ ist

$$f'''(0) = f'(0) = e^0 - e^{-0} = 0, \text{ also } \oint_{|z|=1} \frac{e^z + e^{-z}}{z^4}\,dz = 0.$$

Alternativ: $f(z) = 2\cosh(z) = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$,

also $$\frac{f(z)}{z^4} = 2\sum_{k=-2}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$ und $\operatorname{res}\left(\frac{f(z)}{z^4}; 0\right) = 0$.

Also nach Residuensatz

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z + e^{-z}}{z^4}\,dz = 2\pi i \operatorname{res}\left(\frac{f(z)}{z^4}; 0\right) = 0$$

(b) Der Zähler ist auf $\mathbb{C}$ holomorph.
Nullstellen des Nenners: $z^3 - z^2 + z - 1 = (z^2+1)(z-1)$
$$= (z+i)(z-i)(z-1)$$
Also sind $i, -i, 1$ einfache Polstellen des Integranden,

sie liegen alle im Inneren von $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$.

Setzt man $g(z) = \frac{e^{z^2}}{z^3 - z^2 + z - 1}$, so ist nach dem Residuensatz

$$\oint_{|z|=2} g(z)\,dz = 2\pi i \left(\operatorname{res}(g(z); i) + \operatorname{res}(g(z); -i) + \operatorname{res}(g(z); 1) \right).$$

Weiter ist $\operatorname{res}(g(z); i) = \left.\frac{e^{z^2}}{(z+i)(z-1)}\right|_{z=i} = \frac{e^{-1}}{2i(i-1)}$,

$$\operatorname{res}(g(z); -i) = \left.\frac{e^{z^2}}{(z-i)(z-1)}\right|_{z=-i} = \frac{e^{-1}}{2i(i+1)},$$

$$\operatorname{res}(g(z); 1) = \left.\frac{e^{z^2}}{z^2+1}\right|_{z=1} = \frac{e}{2}.$$

Also
$$\oint_{|z|=2} \frac{e^{z^2}}{z^3 - z^2 + z - 1}\,dz = 2\pi i \left(\frac{e}{2} + \frac{1}{2ie}\left(\frac{1}{i+1} + \frac{1}{i-1} \right) \right)$$
$$= 2\pi i \left(\frac{e}{2} - \frac{1}{2e} \right) = \pi i \left(e - \frac{1}{e} \right)$$

<u>Aufgabe 3</u>

Setzt man $P(x,y) = \left(\frac{2}{x} - 2(x+y) \right) e^{-(x+y)^2}$, $Q(x,y) = -2(x+y) e^{-(x+y)^2}$,

so ist $P_y = -2e^{-(x+y)^2} - 2(x+y)\left(\frac{2}{x} - 2(x+y) \right) e^{-(x+y)^2}$

$$Q_x = -2e^{-(x+y)^2} + 4(x+y)^2 e^{-(x+y)^2}.$$

Somit $P_y \neq Q_x$ und die Dgl ist in $(0,\infty) \times \mathbb{R}$ nicht exakt.

Andererseits ist
$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{-2(x+y)\frac{2}{x} e^{-(x+y)^2}}{-2(x+y) e^{-(x+y)^2}} = \frac{2}{x},$$

und es gibt also einen Multiplikator $\mu(x)$, der Lsg ist von $\mu' = \frac{2}{x}\mu$. Man erhält $\mu(x) = x^2$, und die auf $(0,\infty) \times \mathbb{R}$ äquivalente Gleichung

$$(2x - 2x^2(x+y)) e^{-(x+y)^2} - 2x^2(x+y) e^{-(x+y)^2} y' = 0.$$

Es ist $\int \left(-2x^2(x+y) e^{-(x+y)^2} \right) dy = x^2 e^{-(x+y)^2} + c(x)$

und $\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 e^{-(x+y)^2} + c(x) \right) = (2x - 2x^2(x+y)) e^{-(x+y)^2} + c'(x)$

(4)

Also $c'(x) = 0$ und $c(x) = c$ konstant.

Jede Lsg der Dgl. ist also implizit gegeben durch

$$x^2 e^{-(x+y)^2} = \alpha .$$

Der Anfangswert $y(1) = 0$ führt zu $\alpha = \frac{1}{e}$. Also

$$x^2 e^{-(x+y)^2} = \frac{1}{e} \iff -(x+y)^2 = -1 - 2\log x$$

$\iff (x+y)^2 = 1 + 2\log x$. Schließlich

$y(x) = \sqrt{1 + 2\log x} - x$ (wegen $y(1) = 0$ muss hier die positive Wurzel stehen!). Damit ist die Lsg des AWP eindeutig bestimmt und man kann $b = \infty$ ablesen.

Aufgabe 4

(a) Charakteristisches Polynom der Gleichung ist

$\lambda^2 + 4\lambda + 5$ mit Nullstellen $\lambda_1 = -2+i$, $\lambda_2 = -2-i$

Ein reelles Fundamentalsystem ist also gegeben durch

$y_1(x) = e^{-2x}\cos x$, $y_2(x) = e^{-2x}\sin x$

und die allg. Lsg hat die Form

$$y(x) = c_1 e^{-2x}\cos x + c_2 e^{-2x}\sin x \quad , x \in \mathbb{R},$$

wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ Konstanten sind.

Auf[gabe] folgern: $y(0) = 0 \implies c_1 = 0$

Lsg ableiten $y'(x) = -2c_2 e^{-2x}\sin x + c_2 e^{-2x}\cos x$

$y'(0) = 1 \implies c_2 = 1$

Lsg des AWP: $y(x) = e^{-2x}\sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) $$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1)x^{k-2}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} c_{k+1}(k+1)k x^{k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2}(k+2)(k+1)x^k .$$

Wir setzen in $(x^2 - 2x + 1)y'' - 2y = 0$ ein:

(5)

$$\sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1)x^k - 2\sum_{k=1}^{\infty} c_{k+1}(k+1)kx^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2}(k+2)(k+1)x^k$$

$$-2\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0,$$

also

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left(c_k k(k-1) - 2c_{k+1}(k+1)k + c_{k+2}(k+2)(k+1) - 2c_k\right)x^k$$

$$+(-4c_2+6c_3-2c_1)x + 2c_2 - 2c_0 = 0$$

Anf'folg: $c_0 = 1,\ c_1 = 1$

$\Rightarrow c_2 = c_0 = 1,\ c_3 = c_1 = 1$ etc.

<u>Beh:</u> $c_k = 1$ f. a. $k \in \mathbb{N}_0$.

<u>Bew:</u> IA ✓

IS $c_k = 1,\ c_{k+1} = 1$ und

$$c_k k(k-1) - 2c_{k+1}(k+1)k + c_{k+2}(k+2)(k+1) - 2c_k = 0$$

$$\underset{c_k = c_{k+1} = 1}{\Longleftrightarrow} \quad k(k-1) - 2(k+1)k + c_{k+2}(k+2)(k+1) - 2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad c_{k+2}(k^2+3k+2) = k^2+3k+2 \Longleftrightarrow c_{k+2} = 1 \ //$$

Somit

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \text{ für } |x| < 1$$

Konvergenzradius dieser Potenzreihe ist 1.