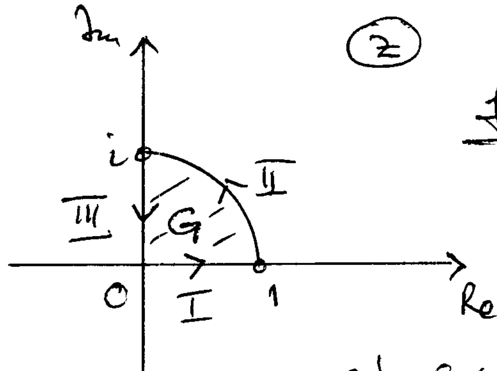
HM III Klausur Sep 2009 Lösungen

Aufgabe 1

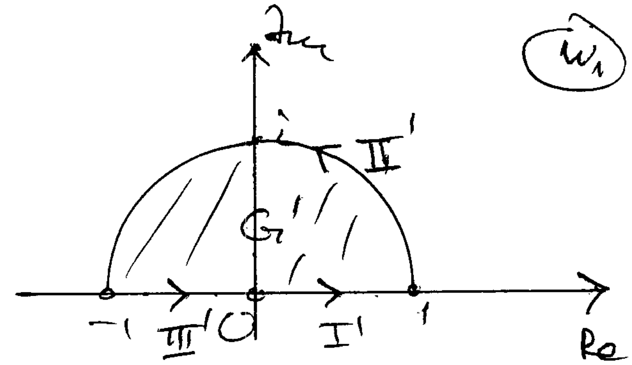
a) Mit $f_1(z) = z^2$, $f_2(z) = \frac{1+z}{1-z}$ hat man

$$w = f(z) = f_1(f_2(f_1(z))).$$

1. Schritt: $w_1 = f_1(z) = z^2$



$\xrightarrow{f_1}$



$G' = f_1(G) = \{ w_1 \mid |w_1| < 1, 0 < \arg w_1 < \pi \}$

2. Schritt $G' \to f_2(G') = G''$

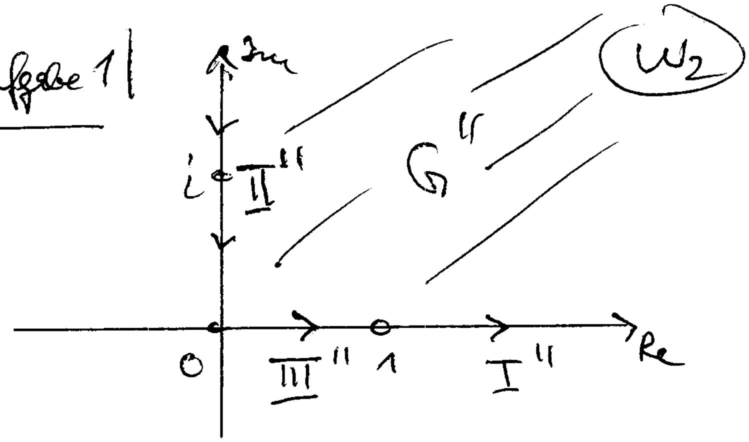
$$w_2 = f_2(w_1) = \frac{1+w_1}{1-w_1} \quad \text{Möbiustransformation}$$

II' geht durch 1 $\longrightarrow$ $II'' = f_2(II')$ ist Gerade durch
Bild von -1 : 0
und Bild von i : i
II'' ist imaginäre Achse ti : $t: \infty \to 0$.

Die reelle Achse geht über in die reelle Achse:
$III' \longrightarrow$ Strecke auf $\mathbb{R}$ von $0 = f_2(-1)$ bis $1 = f_2(0)$
$I' \longrightarrow$ Strecke auf $\mathbb{R}$ von 1 bis ∞

Rand $\to$ Rand, Orientierung bleibt erhalten
$\to G'' = f_2(G')$

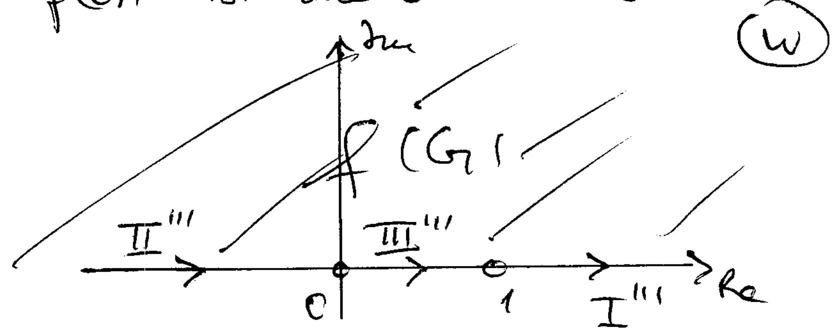
noch Aufgabe 1



3. Schritt : $w = w_2^2$

Winkel zwischen Geraden im Nullpunkt wird verdoppelt

$f(G)$ ist die obere Halbebene



b) f_1 ist auf G injektiv: $z_1, z_2 \in G$, $z_1 \neq z_2$
$\rightarrow z_1^2 \neq z_2^2$.

f_2 ist auf G' als Möbiustransformation injektiv

f_1 ist auf G'' wieder injektiv

$\rightarrow$ f ist als Hintereinanderausführung injektiver Abbildungen auf G injektiv

HM III Klausur Sep 2009 Lösungen

Aufgabe 2

a) $g(z) = -h'(z)$ mit $h(z) = \frac{1}{z+i}$

Entwicklung von $h(z)$ um i:

$$h(z) = \frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}\,\frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}}$$

geometr. Reihe $$\overset{\downarrow}{=} \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2i)^k}(z-i)^k \qquad (|z-i|<2)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2i)^{k+1}}(z-i)^k$$

$$\rightarrow g(z) = -h'(z) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{k}{(2i)^{k+1}}(z-i)^{k-1}$$

$$\underline{g(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{k+1}{(2i)^{k+2}}(z-i)^k, \quad |z-i|<2}$$

b) Mit $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2} = \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}$

gilt mit Vorlesung wegen: f ist rational, Nennergrad − Zählergrad $= 4 > 2$, es liegen keine Singularitäten auf der reellen Achse:

$$\underline{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2} = 2\pi i \operatorname{Res}(f;i)}$$. Aus a) erhält

man die Laurentreihe von $f(z)$ um i in $0<|z-i|<2$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{k+1}{(2i)^{k+2}}(z-i)^{k-2}$$ und hieraus

$$\operatorname{Res}(f;i) = \big((\text{Koeff für } k=1)\big) = \frac{1}{4i} \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{2}$$

Aufgabe 3

a) $(*) \Longleftrightarrow \; y'(e^y + x^2) - \varphi(x,y) = 0$ ist exakt,

falls $-D_2\varphi(x,y) = 2x$ gilt. Es folgt $\underline{\varphi(x,y) = -2xy}$.

b) $y'(e^y + x^2) + 2xy = 0$ ist exakt.

Berechnung eines Potentials (Stammfunktion) $V(x,y)$ aus

$$D_2V(x,y) = e^y + x^2 \quad , \quad D_1V(x,y) = 2xy$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \shortparallel$$

$$V(x,y) = e^y + x^2y + \lambda(x) \longrightarrow D_1V(x,y) = 2xy + \lambda'(x)$$

$$\longrightarrow \lambda(x) = \text{Const.}$$

und $V(x,y) = e^y + x^2y + C$ (C beliebig, konst)

<u>Alle Lösungen von (*) sind durch</u>

$$\underline{e^y + x^2y = \text{Const}} \quad \text{gegeben.}$$

c) $y(1) = 1 \longrightarrow e^1 + 1 = e + 1 = C$

also: $e^y + x^2y = e + 1$

$$\longrightarrow \underline{x(y) = \sqrt{\frac{e+1-e^y}{y}}}, \quad \underline{0 < y < \ln(e+1)}$$

Aufgabe 4

a) $y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $xy' = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k$, $y'' = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k$,

$$x^2 y'' = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^k$$

Einsetzen in die homogene Dgl und Koeffizientenvergleich liefert die Rekursionsformel:

(R) $$\underline{a_{k+2} = \frac{(k-2)(k-1)}{(k+2)(k+1)} a_k \quad , k = 0, 1, 2, \ldots}$$

Eine Lösung erhält man etwa durch $a_0 = 1$, $a_1 = 0$.

Aus (R) folgt: $\underline{a_{2k+1} = 0 \quad , k = 0, 1, \ldots}$

$\underline{a_2 = a_0 = 1, \quad a_4 = 0 \longrightarrow a_{2k} = 0} \quad k = 2, 3, \ldots$

Also: $\underline{y_1(x) = 1 + x^2 \text{ ist eine Lösung}}$

b) Eine von y_1 l. u. Lösung y_2 erhält man z.B. durch Wahl $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

Hiermit liefert (R) : $\underline{a_{2k} = 0} \quad k = 0, 1, \ldots$

$\underline{a_3 = 0 \rightarrow a_{2k+1} = 0 \quad k = 1, 2, \ldots}$

Und also: $\underline{y_2(x) = x}$, so dass die allgemeine Lösung von $Ly = 0$ durch

$$\underline{y_h(x) = c_1 x + c_2 (1 + x^2) \, , \, c_1, c_2 \text{ beliebige Konst}}$$

gegeben ist.

noch Aufgabe 4

c) Polynomansatz zur Lösung von $Ly = -2x^3 + 6x - 2$
(wird durch die Inhomogenität nahegelegt)

$y_p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

Einsetzen und Koeffizientenvergleich ergeben

$a_0 - a_2 = 1$, $\underline{a_3 = 1}$, a_1, a_2 beliebig: wähle $\underline{a_1 = a_2 = 0}$

$\rightarrow$ $\underline{a_0 = 1}$

$\rightarrow$ $\underline{y_p = 1 + x^3}$

Damit ist die allgemeine Lösung von $Ly = -2x^3 + 6x - 2$:

$$\underline{y = c_1 x + c_2 (1 + x^2) + 1 + x^3, \quad c_1, c_2 \text{ beliebig konstant}}$$

c_1, c_2 werden aus $y(0) = 3$, $y'(0) = -4$ berechnet:

$y(0) = 3 \rightarrow c_2 = 2$

$y'(0) = -4 \rightarrow c_1 = -4$

und also erhält man die Lösung von (*):

$$\underline{y = -4x + 2(1 + x^2) + 1 + x^3}$$