Lösung zur Klausur, SS 2010

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 a)
Wir berechnen zunächst die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \; & (3-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) - 1 \cdot 3 \cdot (2-\lambda) = \\ & (2-\lambda)[(3-\lambda)(1-\lambda) - 3] = \\ & (2-\lambda)(3 - 3\lambda - \lambda + \lambda^2 - 3) = \\ & (2-\lambda)(-4\lambda + \lambda^2) = \\ & (2-\lambda) \cdot \lambda \cdot (-4+\lambda) = \\ & -\lambda(\lambda-2)(\lambda-4). \end{aligned}$$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind also 0, 2, 4. Das sind bekanntlich dann auch die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix. Wir berechnen die zugehörigen Eigenräume.

Eigenwert 0:

$$\operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 3-0 & 1 & 0 \\ 3 & 1-0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-0 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right].$$

Eigenwert 2:

$$\operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 3-2 & 1 & 0 \\ 3 & 1-2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

Eigenwert 4:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 3-4 & 1 & 0 \\ 3 & 1-4 & 0 \\ 0 & 0 & 2-4 \end{pmatrix} = \; & \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \\ & \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Wir erhalten also ein Fundamentalsystem durch

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) i)

Es gilt

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -A.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} &A^3 = A(A^2) = A(-A) = -A^2 = A, \\ &A^4 = A(A^3) = A^2 = -A, \\ &A^5 = A(A^4) = A(-A) = A, \text{ und wir erhalten induktiv} \\ &A^k = -(-1)^k A \text{ für alle } k \in \mathbb{N} \text{ mit } k \geq 2. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \big(-(-1)^k A \big) = I - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} A = I - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} A \ + A = \\ &I - e^{-t}A + A = \begin{pmatrix} 2e^{-t} - 1 & -e^{-t} + 1 \\ 2e^{-t} - 2 & -e^{-t} + 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) ii)

Gemäß der Variation-der-Konstanten-Formel aus Kapitel 29.5 erhalten wir die gesuchte Lösung durch

$$\vec{y}(t) = e^{(t-t_0)A}\vec{y}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A}\vec{b}(\tau)\, d\tau, \quad t \in \mathbb{R},$$

mit $t_0 = 0$, $\vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Es gilt also

$$\begin{aligned} &\vec{y}(t) = \\ &\quad \begin{pmatrix} 2e^{-t} - 1 & -e^{-t} + 1 \\ 2e^{-t} - 2 & -e^{-t} + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 2e^{-(t-\tau)} - 1 & -e^{-(t-\tau)} + 1 \\ 2e^{-(t-\tau)} - 2 & -e^{-(t-\tau)} + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\tau} \\ 0 \end{pmatrix} d\tau = \\ &\quad \begin{pmatrix} -e^{-t} + 1 \\ -e^{-t} + 2 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 2e^{-t} - e^{-\tau} \\ 2e^{-t} - 2e^{-\tau} \end{pmatrix} d\tau = \\ &\quad \begin{pmatrix} -e^{-t} + 1 \\ -e^{-t} + 2 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 2e^{-t}\tau + e^{-\tau} \\ 2e^{-t}\tau + 2e^{-\tau} \end{pmatrix} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} \\ &\quad \begin{pmatrix} -e^{-t} + 1 + 2e^{-t}t + e^{-t} - 1 \\ -e^{-t} + 2 + 2e^{-t}t + 2e^{-t} - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2te^{-t} \\ e^{-t} + 2te^{-t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Kennt man e^{tA} nicht, so kann man auch die Variation-der-Konstanten-Formel aus Kapitel 29.1 verwenden. In diesem Fall entsteht zusätzlicher Aufwand bei der Berechnung des Fundamentalsystems Φ und seiner Inveresen $\Phi(\tau)^{-1}$ und $\Phi(0)^{-1}$, sowie bei den entsprechenden Matrixmultiplikationen.

Aufgabe 2 **a)** Aus der Differentialgleichung in Kombination mit dem Anfangswert lesen wir ab, daß eine positive Lösung gesucht ist.

Wir schreiben die Differentialgleichung in der Form

$$y' = y + e^{2x} y^{-3}$$

und stellen fest, daß es sich um eine Bernoulli-Differentialgleichung (mit $\alpha := 3$) handelt.

Multiplikation mit $(1-\alpha)y^{-\alpha} = 4y^3$ führt auf

$$4y^3 y' = 4y^4 + 4e^{2x}.$$

Wir setzen $z := y^{1-\alpha} = y^4$. Dann gilt $z' = 4y^3 y'$ und $z(0) = (y(0))^4 = 1$. Wir suchen daher die Lösung des Anfangswertproblems

$$z' = 4z + 4e^{2x}, \quad z(0) = 1, \quad x \in I,$$

wobei $I = \{\, x \in \mathbb{R} : \, z(x) > 0 \,\}$ gelten soll (damit $z = y^4$ nach $y \neq 0$ aufgelöst werden kann).

Gemäß Kapitel 27.1 erhalten wir als eindeutige Lösung dieses Problems

$$z(x) = z_0 e^{A(x)} + e^{A(x)} \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)} b(t)\, dt, \quad x \in I,$$

wobei $z_0 := 1$, $x_0 = 0$, $b(x) = 4e^{2x}$ und $A(x) = \int_0^x 4\, d\xi = 4x$.

Also gilt

$$z(x) = e^{4x} + e^{4x} \int_0^x e^{-4t} 4e^{2t}\, dt = e^{4x} + e^{4x} [-2e^{-2t}]_{t=0}^{t=x} = e^{4x}(3 - 2e^{-2x}).$$

Es gilt

$$z(x) > 0 \iff e^{4x}(3 - 2e^{-2x}) > 0 \iff 3 > 2e^{-2x} \iff e^{2x} > \frac{2}{3} \iff x > \frac{1}{2} \ln \frac{2}{3} =: c,$$

es ist also $I = (c, \infty)$ und somit $0 \in I$.

Wegen $y > 0$ erhalten wir schließlich die Lösung

$$y(x) = e^x \sqrt[4]{3 - 2e^{-2x}}$$

mit zugehörigem (maximalen) Existenzintervall $(\frac{1}{2} \ln \frac{2}{3}, \infty)$.

b)
Es gilt

$$P_y = -\sin(x+y)[y^2 - \sin x] + \cos(x+y) \cdot 2y$$

und

$$Q_x = -\sin(x+y)[y^2 - \sin x] + \cos(x+y)(-\cos x)$$

Wie nach dem ersten Hinweis zu erwarten hängt

$$\frac{Q_x - P_y}{P - Q} = \frac{\cos(x+y)(-\cos x) - \cos(x+y) \cdot 2y}{-\cos x - 2y} = \cos(x+y)$$

nur von $x + y$ ab (sofern definiert), vgl. Kapitel 27.5 Beispiel c).

Wir suchen wie im genannten Beispiel nun eine Lösung von $\varrho'(t) = \cos(t)\varrho(t)$. Offenbar ist $\varrho(t) = e^{\sin t}$ eine solche, und wir erhalten mittels $\mu(x, y) := e^{\sin(x+y)}$ einen integrierenden Faktor.

Damit ist $\mu P dx + \mu Q dy = 0$ exakt und wir suchen ein zugehöriges Potential F.

Es muß dann

$$F_x = \mu P = e^{\sin(x+y)} \cos(x+y)[y^2 - \sin x] - e^{\sin(x+y)} \cos x = f'g + fg'$$

mit $f(x) := e^{\sin(x+y)}$ und $g(x) := y^2 - \sin x$ gelten, vgl. Hinweis 2.

Damit folgt $F = fg = e^{\sin(x+y)}[y^2 - \sin x] + c(y)$ mit einer gewissen Funktion $c = c(y)$. Wegen $F_y = e^{\sin(x+y)} \cos(x+y)[y^2 - \sin x] + e^{\sin(x+y)} \cdot 2y + c'(y) = \mu Q + c'(y)$ können wir $c \equiv 0$ wählen.

Wir erhalten damit die Lösung(en) des gegebenen Anfangswertproblem in der impliziten Form

$$F(x, y) = F(0, 1).$$

Es gilt $F(\pi/2, 1) = e^{\sin(\pi/2+1)}[1 - \sin(\pi/2)] = 0$.

Wir untersuchen also die Gleichung $e^{\sin(x+y)}[y^2 - \sin x] = 0$. Das ist gleichbedeutend mit

$$y^2 = \sin x.$$

Damit diese Gleichung nach (einer differenzierbaren Funktion) y aufgelöst werden kann, muß $\sin x$ positiv sein. Wir suchen daher ein maximales Intervall $I \subset \mathbb{R}$ so, daß $0 \in I$ (wegen des Anfangswerts) gilt und $\sin > 0$ auf I gilt. Wir erhalten $I = (0, \pi)$.

Wegen $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ folgt schließlich, daß das gegebene Anfangswertproblem durch

$$y = \sqrt{\sin x}$$

(mit zugehörigem maximalen Existenzintervall $(0, \pi)$) gelöst wird.

Aufgabe 3 Wir bemerken zunächst, daß der Konvergenzradius der rechten Seite 1 ist, was man mit dem Wurzelkriterium leicht einsieht.

Wir machen wie gefordert einen Potenzreihenansatz; es gelte also

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k\,, \qquad y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}\,, \qquad y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2}\,.$$

Wegen der Anfangsbedingungen kennen wir schon die Koeffizienten

$$c_0 = y(0) = 1 \text{ und } c_1 = y'(0) = 0.$$

Eingesetzt in die linke Seite der Differentialgleichung ergibt sich

$$\begin{aligned}
&y'' - xy' + 2y = \\
&\quad \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} - x\sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} + 2\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \\
&\quad \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty} -k c_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} 2 c_k x^k = \\
&\quad \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} (-k+2) c_k x^k = \\
&\quad \sum_{k=0}^{\infty} \big[(k+2)(k+1)c_{k+2} + (-k+2)c_k\big] x^k.
\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich mit der rechten Seite der Differentialgleichung liefert

$$(k+2)(k+1)c_{k+2} + (-k+2)c_k = \begin{cases} 0, & \text{für } k \text{ ungerade, } k \geq 1 \\ 4(n^2+n+1), & \text{für } k \text{ gerade und } k = 2n, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Daraus erhalten wir die Rekursionsformeln

$$\begin{cases} c_{k+2} = \dfrac{(-k+2)c_k}{(k+2)(k+1)}, & \text{falls } k \text{ ungerade, } k \geq 1 \\[2ex] c_{2(n+1)} = \dfrac{2(n^2+n+1) - (-n+1)c_{2n}}{(n+1)(2n+1)}, & \text{falls } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Zusammen mit $c_1 = 0$ lesen wir aus der Rekursionsformel direkt $c_3 = c_5 = c_7 = \cdots = 0$ ab.

Außerdem ergibt sich für gerade Indices

$$\begin{aligned}
c_0 &= 1, \\
c_2 &= \frac{2 - c_0}{1} = 1, \\
c_4 &= \frac{2 \cdot 3 - 0c_2}{2 \cdot 3} = 1, \\
c_6 &= \frac{2 \cdot 7 + c_4}{3 \cdot 5} = \frac{15}{15} = 1,
\end{aligned}$$

und damit kommen wir zu der Vermutung

$$c_k = 1, \qquad \text{falls } k \text{ gerade, } k \geq 0,$$

die wir induktiv beweisen. Der Induktionsanfang ist schon gemacht (für $k = 2 \cdot 0$); es fehlt noch der Induktionsschluss: Gilt die Formel für $k = 2n \geq 0$, so folgt

$$c_{2(n+1)} = \frac{2(n^2+n+1) - (-n+1)c_{2n}}{(n+1)(2n+1)} = \frac{2(n^2+n+1) - (-n+1)}{(n+1)(2n+1)} = \frac{2n^2+3n+1}{2n^2+3n+1} = 1.$$

Die Aussage gilt dann also auch für $n+1$, was den Induktionsbeweis abschließt.

Damit haben wir die Lösung des Anfangswertproblems ermittelt:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (x^2)^k = \frac{1}{1-x^2},$$

wobei die Konvergenz der geometrischen Reihe wegen $x \in (-1, 1)$ gegeben ist.

Schließlich setzen wir die Lösung in die die linke Seite der Differentialgleichung ein, um eine geschlossene Form für die rechte Seite zu erhalten.

Es gilt

$$y' = \frac{2x}{(1-x^2)^2} \text{ und}$$

$$y'' = \frac{2(1-x^2)^2 - 4x(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4} = \frac{2+6x^2}{(1-x^2)^3}.$$

Damit erhalten wir

$$y'' - xy' + 2y = \frac{2+6x^2 - x \cdot 2x(1-x^2) + 2(1-x^2)^2}{(1-x^2)^3} =$$

$$\frac{2+6x^2-2x^2+2x^4+2-4x^2+2x^4}{(1-x^2)^3} = \frac{4+4x^4}{(1-x^2)^3} = \frac{4(1+x^4)}{(1-x^2)^3}$$

als geschlossene Darstellung der rechten Seite.

Aufgabe 4 Das charakteristische System der gegebenen Gleichung lautet

$$\begin{aligned} k_1'(s) &= -k_2(s) \\ k_2'(s) &= k_1(s) \\ w'(s) &= \frac{k_1(s)^2 + k_2(s)^2}{2w(s)}. \end{aligned}$$

Die Kurve Γ für die Anfangswerte ist parametrisiert durch $\xi > 0$, es gilt $\Gamma = \{(\xi, 0) : \xi > 0\}$, dh Γ ist die x-Achse. Zu festem $\xi > 0$ lauten die Anfangswerte für das charakteristische System

$$\begin{aligned} k_1(0) &= \xi \\ k_2(0) &= 0 \\ w(0) &= \sqrt{\pi}\xi. \end{aligned}$$

Wir schreiben die ersten beiden Gleichungen des charakteristischen Systems als $\vec{k}\,' = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \vec{k}$. Das ist ein homogenes lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten. Wir erhalten als allgemeine Lösung

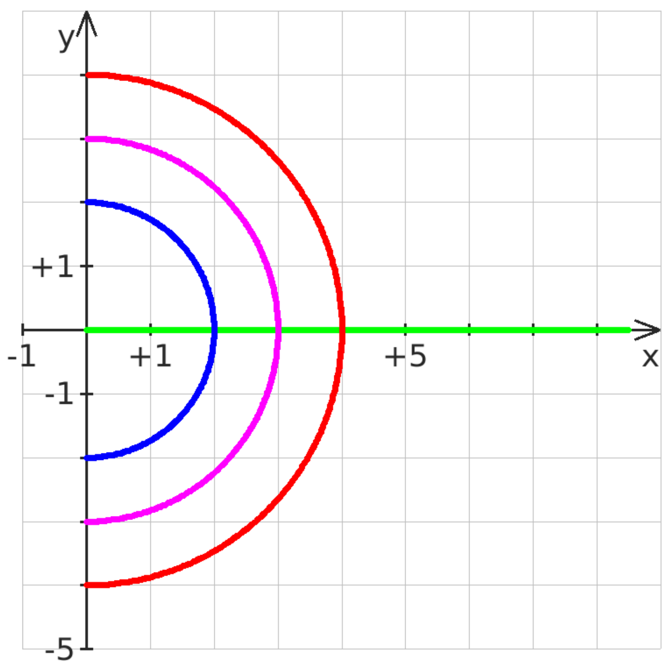
$$\begin{pmatrix} k_1(s) \\ k_2(s) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -\sin s \\ \cos s \end{pmatrix},$$

wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Aus den Anfangsbedingungen folgt dann $\alpha = \xi$ und $\beta = 0$, also sind die Grundcharakteristiken gegeben durch

$$\begin{pmatrix} k_1(s,\xi) \\ k_2(s,\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \cos s \\ \xi \sin s \end{pmatrix}, \quad s \in (-\pi/2, \pi/2), \xi > 0.$$

Das sind Halbkreise mit Radius $\xi > 0$ in der rechten Halbebene D (die Einschränkung für s liegt daran, dass für $|s| = \pi/2$ die Grundcharakteristiken das Gebiet D verlassen).

Skizze (grün: Γ, blau: $\xi = 2$, lila: $\xi = 3$, rot: $\xi = 4$):



Berechnung der Lösung: Es ist klar, dass durch jeden Punkt $(x, y) \in D$ genau eine Grundcharakteristik verläuft. Für $x = k_1(s, \xi)$, $y = k_2(s, \xi)$ sind ξ, s gerade die Polarkoordinaten des Punktes (x, y). Es gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \cos s \\ \xi \sin s \end{pmatrix} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{y}{x} = \arctan s \text{ und } \xi^2 = x^2 + y^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad s = \arctan(y/x) \text{ und } \xi = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ (da } \xi > 0). \end{aligned}$$

Wir berechnen $w(s)$ für festes $\xi > 0$ aus

$$w'(s) = \frac{k_1(s)^2 + k_2(s)^2}{2w(s)} = \frac{\xi^2}{2w(s)}, \quad w(0) = \sqrt{\pi}\xi.$$

Dies ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen. Wir erhalten leicht als eindeutige Lösung

$$w(s)^2 = \xi^2 s + c \overset{w(0)=\sqrt{\pi}\xi}{=} \xi^2(s + \pi).$$

Aufgrund der Anfangswerte und weil $w(s)^2$ für $|s| < \pi/2$ nicht 0 wird, erhalten wir

$$w(s, \xi) = \xi\sqrt{s + \pi}.$$

Nach der Koordinatenumrechnung oben ergibt sich die Lösung zu

$$u(x, y) = w(s, \xi)\big|_{s=\arctan(y/x), \xi=\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{\arctan(y/x) + \pi}.$$

Die Lösung existiert auf ganz D.

Probe: Zunächst ist für $\xi > 0$: $u(\xi, 0) = \xi\sqrt{\pi}$ wegen $\arctan 0 = 0$. Wir setzen zur Abkürzung $g = \arctan(y/x) + \pi$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \partial_x u &= \frac{1}{2u}\left[2xg + (x^2 + y^2)(1 + (y/x)^2)^{-1} \cdot (-y/x^2)\right] = \frac{1}{2u}[2xg - y] \\ \partial_y u &= \frac{1}{2u}\left[2yg + (x^2 + y^2)(1 + (y/x)^2)^{-1} \cdot (1/x)\right] = \frac{1}{2u}[2xg + x]. \end{aligned}$$

Also ist

$$x\partial_y u - y\partial_x u = \frac{1}{2u}\left[2xyg + x^2 - 2yxg + y^2\right] = \frac{x^2 + y^2}{2u}.$$