Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P.C. Kunstmann

Herbst 2011
21.09.2011

Bachelor–Modulprüfung bzw. Diplom–Vorprüfung

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

a) Die Matrix des Systems werde mit A bezeichnet. Wegen

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & & 1-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-1)^2(2-\lambda) - (2-\lambda)$$
$$= -(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda+1-1) = -(\lambda-2)^2\lambda$$

sind 2 und 0 die Eigenwerte von A, wobei der Eigenwert 2 die algebraische Vielfachheit 2 hat. Der Eigenraum von A zum Eigenwert 0 lautet

$$\text{Kern}(A-0\cdot I) = \text{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

Dies liefert eine Lösung von $\vec{y}\,' = A\vec{y}$:

$$\vec{\phi}_1(t) = e^{0\cdot t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t\in\mathbb{R}.$$

Zum Eigenwert 2 gehört der Eigenraum

$$\text{Kern}(A-2I) = \text{Kern}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{Kern}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{lin}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

so dass wir als zwei weitere linear unabhängige Lösungen des Differentialgleichungssystems $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ erhalten:

$$\vec{\phi}_2(t) = e^{2\cdot t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\phi}_3(t) = e^{2\cdot t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t\in\mathbb{R}.$$

Ein Fundamentalsystem von $\vec{y}\,' = A\vec{y}$ ist also gegeben durch $\vec{\phi}_1(t)$, $\vec{\phi}_2(t)$, $\vec{\phi}_3(t)$ bzw.

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ -1 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}, \qquad t\in\mathbb{R}.$$

Die Lösung zum gegebenen Anfangswert erhalten wir als $\vec{\phi}(t) = \Phi(t)\vec{c}$, wobei der Vektor $\vec{c}\in\mathbb{R}^3$ aus $\Phi(1)\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ e \\ 2e \end{pmatrix}$ zu bestimmen ist. Wir lösen also das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & e^2 \\ 0 & e^2 & 0 \\ -1 & 0 & e^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e \\ 2e \end{pmatrix}$$

und erhalten $c_2 = e^{-1}$, $c_3 = e^{-1}$, $c_1 = -e$. Die gesuchte Lösung lautet somit

$$\vec{\phi}(t) = \begin{pmatrix} -e \\ 0 \\ e \end{pmatrix} + \frac{1}{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) i) Es gilt

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = -4I$$

woraus unmittelbar für $k \in \mathbb{N}_0$ folgt:

$$\begin{aligned} B^{2k} &= (-4)^k I = (-1)^k \begin{pmatrix} 2^{2k} & 0 \\ 0 & 2^{2k} \end{pmatrix}, \\ B^{2k+1} &= B^{2k} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (-4)^k \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2(-1)^k 2^{2k+1} \\ -\frac{1}{2}(-1)^k 2^{2k+1} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir erhalten somit für jedes $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} e^{tB} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} B^n = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2t)^{2k}}{(2k)!} & 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2t)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2t)^{2k+1}}{(2k+1)!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2t)^{2k}}{(2k)!} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2t) & 2\sin(2t) \\ -\frac{1}{2}\sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) ii) Die Lösung des Anfangswertproblems $\vec{y}\,' = B\vec{y} + \begin{pmatrix} 2\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}$, $\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist gemäß der Variation-der-Konstanten-Formel aus Kapitel 3.5 gegeben durch

$$\vec{y}(t) = e^{(t-t_0)B} \vec{y}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)B} \vec{b}(s)\, ds\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,,$$

mit $t_0 = 0$, $\vec{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}(s) = \begin{pmatrix} 2\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} =: \vec{b}$. Mit dem Ergebnis aus i) erhält man für jedes $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \vec{y}(t) &= e^{tB}\vec{y}_0 + \int_0^t e^{(t-s)B} \begin{pmatrix} 2\sin(2s) \\ \cos(2s) \end{pmatrix} ds \\ &= e^{tB}\vec{y}_0 + \int_0^t \begin{pmatrix} \cos(2(t-s)) & 2\sin(2(t-s)) \\ -\frac{1}{2}\sin(2(t-s)) & \cos(2(t-s)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\sin(2s) \\ \cos(2s) \end{pmatrix} ds \\ &= e^{tB}\vec{y}_0 + \int_0^t \begin{pmatrix} 2\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -\frac{1}{2}\sin(2t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t\sin(2t) \\ t\cos(2t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Kennt man e^{tB} nicht, so kann man die Variation-der-Konstanten-Formel aus Kapitel 3.1 verwenden. In diesem Fall entsteht zusätzlicher Aufwand bei der Berechnung des Fundamentalsystems Φ und seiner Inversen $\Phi(\tau)^{-1}$ und $\Phi(0)^{-1}$, sowie bei den entsprechenden Matrixmultiplikationen.

Aufgabe 2

a) Die Differentialgleichung ist von der Form $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ mit

$$P(x,y) := 2x\tan y, \qquad Q(x,y) := x^2,$$

wobei P, Q auf $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < \pi/2\}$ stetig differenzierbar sind. Hier ist $P_y - Q_x = 2x(1+\tan^2 y) - 2x = 2x\tan y$ und $\frac{P_y - Q_x}{P} = \tan y$ hängt nur von y ab. Somit erhält man einen integrierenden Faktor $\mu = \mu(y)$, der nur von y abhängt, durch Lösen von

$$\mu' = -\tan(y)\,\mu$$

erhält:

$$\mu(y) = e^{-\int \tan y\, dy}, \quad \text{wobei } -\int \tan y\, dy = \int \frac{-\sin y}{\cos y}\, dy = \ln(\cos y).$$

Beachte, dass $\cos y > 0$ für $|y| < \pi/2$ ist. Also ist

$$\mu(y) = e^{\ln(\cos y)} = \cos y \quad (> 0)$$

ein integrierender Faktor, die Gleichung

$$2x \sin y\, dx + x^2 \cos y\, dy = 0$$

ist exakt in D, und eine Stammfunktion (ein Potential) ist gegeben durch $F(x, y) = x^2 \sin y$, $(x, y) \in D$. Alle Lösungen der Differentialgleichung sind implizit gegeben durch $x^2 \sin y = c$, wobei $c \in \mathbb{R}$. Die Anfangswertbedingung $y(1) = \pi/4$ führt auf $c = 1^2 \sin(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$, so dass die gesuchte Lösung gegeben ist durch $x^2 \in y = 1/\sqrt{2}$ bzw. durch

$$y(x) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}x^2}\right), x \in I,$$

wobei die Bedingung $|y| < \pi/2$ auf $\frac{1}{\sqrt{2}x^2} < 1$ führt und das maximale Existenzintervall also $I = (1/\sqrt[4]{2}, \infty)$ ist.

Man kann die Gleichung auch durch Trennung der Variablen lösen. Dann braucht man eine Stammfunktion zu $1/\tan y$ und muss bei $y = 0$ etwas mehr aufpassen.

b) Die Differentialgleichung ist eine Riccati-Gleichung. Da keine konstanten Lösungen existieren, hat eine Polynomlösung ϕ einen Grad $n \in \mathbb{N}$. Dann haben ϕ' und ϕ/x den Grad $n-1$ und $x^3\phi^2$ hat den Grad $2n+3$, und man erhält $2n + 3 = n - 1$ oder $2n + 3 = 5$, woraus $n = 1$ folgt. In der Tat ist $\phi(x) = x$ eine Lösung. Setzt man $y = u + \phi$, erhält man das AWP

$$u' = (2x^4 + \frac{1}{x})u + x^3u^2, \quad u(1) = 2.$$

Die Substitution $z := 1/u$ führt auf das lineare AWP

$$z' = -(2x^4 + \frac{1}{x})z - x^3, \quad z(1) = \frac{1}{2}.$$

Lösug der homogenen Gleichung ist $z = ce^{-\frac{2}{5}x^5 - \ln x} = \frac{c}{x}e^{-\frac{2}{5}x^5}$. Eine Lösung z_P der inhomogenen Gleichung erhält man mittels Variation der Konstanten:

$$z_P = -e^{-\frac{2}{5}x^5} \cdot \frac{1}{x} \int x^3 \cdot xe^{\frac{2}{5}x^5}\, dx = -e^{-\frac{2}{5}x^5} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2}e^{\frac{2}{5}x^5} = -\frac{1}{2x}.$$

Die Anfangswertbedingung $z(1) = 1/2$ führt wegen $z_P(1) = -1/2$ auf $c = e^{2/5}$, und die eindeutige Lösung des linearen AWPs ist

$$z(x) = \frac{e^{\frac{2}{5}(1-x^5)}}{x} - \frac{1}{2x} = \frac{2e^{\frac{2}{5}(1-x^5)} - 1}{2x},$$

woraus man

$$y(x) = x + \frac{2x}{2e^{\frac{2}{5}(1-x^5)} - 1}, \quad x \in I.$$

als eindeutige Lösung des ursprünglichen AWPs erhält. Hier darf der Nenner nicht Null werden, also muss $2e^{\frac{2}{5}(1-x^5)} > 1$ bzw. $x^5 < 1 + \frac{5}{2}\ln 2$ bleiben. Das maximale Existenzintervall (beachte die Einschränkung $x > 0$ in der Aufgabenstellung) ist also $I = (0, \sqrt[5]{1 + \frac{5}{2}\ln 2})$.

Es ist auch $\phi(x) = -x$ eine Lösung, mit der man die Rechnung beginnen kann. Die Rechnungen sind dann ähnlich.

Aufgabe 3

Der Potenzreihenansatz

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \,,$$

wobei $c_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$, zu bestimmende Koeffizienten sind, führt auf

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \,, \qquad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} \,.$$

Für gegebene Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ ist dabei ist die Lösung der linearen Differentialgleichung durch die Anfangsbedingungen $c_0 = y(0)$ und $c_1 = y'(0)$ eindeutig bestimmt. Die Lösung ist hängt also ab von den vier Parametern a, b, c_0, c_1.
Eingesetzt in die linke Seite der Differentialgleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} y''(x) + x^2 y'(x) + 2xy(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2 c_n x^{n+1} \\ &= 2c_2 + \sum_{n=0}^{\infty} \Big[(n+3)(n+2) c_{n+3} + (n+2) c_n \Big] x^{n+1}. \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite der Differentialgleichung steht

$$b + ax.$$

Koeffizientenvergleich liefert nun

$$2c_2 = b \quad \text{und} \quad (n+3)(n+2)c_{n+3} + (n+2)c_n = \begin{cases} a, & \text{falls } n = 0, \\ 0, & \text{falls } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{b}{2}, \\ c_3 &= \frac{a - 2c_0}{3 \cdot 2} = -\frac{1}{3}\Big(c_0 - \frac{a}{2}\Big), \\ c_{n+3} &= -\frac{1}{n+3} c_n, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Die letzte Zeile ist eine Rekursionsformel in "Dreierschritten". Hieraus liest man ab

$$\begin{aligned} c_{3k} &= (-1)^k \frac{1}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 3k} \Big(c_0 - \frac{a}{2}\Big), \quad k \geq 1, \\ c_{3k+1} &= (-1)^k \frac{1}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3k+1)} \, c_1, \quad k \geq 1, \\ c_{3k+2} &= (-1)^k \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3k+2)} \, b, \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

Für gegebene $a, b, c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ sind dadurch alle Koeffizienten c_k, $k \geq 2$, bestimmt und die Lösung ist dann gegeben durch

$$y(x) = c_0 + \Big(c_0 - \frac{a}{2}\Big) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{3k}}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 3k} + c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{3k+1}}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3k+1)} + b \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{3k+2}}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3k+2)}.$$

Hierdurch ist ein Polynom beschrieben genau dann, wenn die Faktoren vor den drei Reihen verschwinden, dh also genau dann, wenn $c_1 = b = 0$ und $c_0 = a/2$ gilt. In diesem Fall ist die Lösung $y(x) = c_0$ eine Konstante.

Die gesuchte Menge der Paare $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, für welche die Gleichung eine Polynomlösung besitzt, ist also $\mathbb{R} \times \{0\} = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : b = 0\}$, dh b muss 0 sein, aber für $b = 0$ kann a beliebig sein (Wie gesehen gibt zu jedem dieser Paare (a,b) genau eine Polynomlösung).

Man beachte außerdem, dass sich die allgemeine Lösung schreiben lässt als

$$y(x) = \underbrace{c_0 \Big(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{3k}}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 3k}\Big)}_{=:\phi_1(x)} + \underbrace{c_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{3k+1}}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3k+1)}}_{=:\phi_2(x)}$$

$$+ \underbrace{b \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{3k+2}}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3k+2)} - \frac{a}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{3k}}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 3k}}_{=:\psi(x)},$$

wobei $\phi_{1/2}$ linear unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung sind und ψ eine Lösung der inhomogenen Gleichung ist, und zwar diejenige mit Anfangswerten $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 0$.

Aufgabe 4

a) Das charakteristische System der gegebenen Gleichung lautet

$$\begin{aligned} k_1'(s) &= 3k_1(s)\,, \\ k_2'(s) &= k_2(s)\,, \\ w'(s) &= \frac{k_1(s)}{k_2(s)^3}\, w(s)\,. \end{aligned}$$

Auf der Kurve $\Gamma = \{(\xi^4, \xi) : \xi > 0\}$ sind die Anfangswerte vorgegeben und zu festem $\xi > 0$ lauten die Anfangswerte für das charakteristische System

$$\begin{aligned} k_1(0) &= \xi^4\,, \\ k_2(0) &= \xi\,, \\ w(0) &= \frac{1}{\xi}\,. \end{aligned}$$

Für festes $\xi > 0$ erhält man $k_1(s) = \xi^4 e^{3s}$ und $k_2(s) = \xi e^s$ als eindeutige Lösungen der ersten beiden Gleichungen des charakteristischen Systems, dh als Grundcharakteristiken.

Wir bemerken, dass $k_1(s) = \xi^4 e^{3s} = \xi(\xi e^s)^3 = \xi k_2(s)^3$ gilt, d.h. $x = \xi y^3$, wenn $x = k_1(s), y = k_2(s)$ gesetzt wird. Die Grundcharakteristiken verlassen D nicht und existieren für $\xi > 0$, $s \in \mathbb{R}$ mit $k_{1/2}(s) \to 0+$ für $s \to -\infty$.

Sei $(x,y) \in D$. Dann gilt $k_1(s,\xi) = x$, $k_2(s,\xi) = y$ genau dann, wenn

$$x = \xi y^3 \quad \text{und} \quad y = \xi e^s$$

bzw. genau dann, wenn

$$\xi = \frac{x}{y^3} \quad \text{und} \quad s = \ln\Big(\frac{y}{\xi}\Big) = \ln\Big(\frac{y^4}{x}\Big)$$

gilt. Somit verläuft durch jeden Punkt $(x,y) \in D$ genau eine Grundchakteristik.

Für festes $\xi > 0$ erhalten wir das Anfangswertproblem

$$w'(s) = \frac{k_1(s)}{k_2(s)^3}\, w(s) = \xi w(s), \quad w(0) = \frac{1}{\xi},$$

dessen eindeutige Lösung $w(s) = \frac{1}{\xi} e^{\xi s}$ für $s \in \mathbb{R}$ existiert.

Durch Einsetzen erhält man als Lösung der ursprünglichen Gleichung

$$u(x,y) = \frac{y^3}{x}\exp\left(\frac{x}{y^3}\ln\left(\frac{y^4}{x}\right)\right) = \frac{y^3}{x}\left(\frac{y^4}{x}\right)^{\frac{x}{y^3}},$$

welche für jedes $(x,y) \in D$ definiert ist. Es ist also $\tilde{D} = D$ hier.

b) Wie unter a) sind die Grundcharakterisitiken durch $k_1(s,\xi) = \xi^4 e^{3s}$, $k_2(s,\xi) = \xi e^{3s}$, $s \in \mathbb{R}$ gegeben, wobei $\xi > 0$, und es ist

$$k_1(s,\xi) = x \text{ und } k_2(s,\xi) = y \iff \xi = \frac{x}{y^3} \text{ und } s = \ln\left(\frac{y}{\xi}\right) = \ln\left(\frac{y^4}{x}\right),$$

so dass durch jeden Punkt $(x,y) \in D$ genau eine Grundcharakteristik verläuft.

Für festes $\xi > 0$ erhalten wir nun das Anfangswertproblem

$$w'(s) = \frac{k_1(s)}{k_2(s)^3}\, w(s)^2 = \xi w(s)^2, \quad w(0) = \frac{1}{\xi},$$

dessen eindeutige Lösung man durch Trennung der Variablen bestimmt:

$$\int_{1/\xi}^{w} \frac{d\omega}{\omega^2} = \int_0^s \xi\, d\sigma, \qquad \xi - \frac{1}{w} = \xi s, \qquad w(s) = (\xi - \xi s)^{-1} = \frac{1}{\xi}(1-s)^{-1}.$$

Das maximale Existenzintervall dieser Lösung ist $(-\infty, 1)$, dh wir können sie nicht für $s \geq 1$ betrachten.

Obwohl also die Grundcharakteristik für $s \in \mathbb{R}$ existiert, existieren die zugehörigen Werte $w(s)$ der Lösung nur für $s \in (-\infty, 1)$. Man beachte, dass $k_1(1) = \xi^4 e^3$ und $k_2(s) = \xi e$. In den Punkten $(\xi^4 e^3, \xi e)$, $\xi > 0$, hört die Lösung auf zu existieren. Dies ist eine Parameterdarstellung der Kurve $\{(y^4/e, y) : y > 0\}$.

Durch Einsetzen erhalten wir als Lösung der ursprünglichen Gleichung

$$u(x,y) = \frac{y^3}{x}\left(1 - \ln\left(\frac{y^4}{x}\right)\right)^{-1},$$

und zwar für $(x,y) \in \tilde{D}$, wobei

$$\tilde{D} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0, y^4/e < x\}.$$

Dies ist der maximale Existenzbereich in D für eine mittels der Charakteristikenmethode berechnete Lösung.