Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann Herbst 2013

**Klausur**

**Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik**

**Lösungsvorschläge**

## Aufgabe 1

**a)** Wir wollen zunächst eine spezielle Lösung der Form $\varphi(x) = ax$ finden. Setzen wir diese Funktion in die Differentialgleichung ein, so folgt

$$\varphi'(x) + \frac{1}{x^2}\varphi(x)^2 = a + \frac{1}{x^2}a^2x^2 \overset{!}{=} -\frac{1}{4} \iff a^2 + a + \frac{1}{4} = 0 \iff a = -\frac{1}{2}.$$

Also ist $\varphi(x) = -\frac{1}{2}x$ eine spezielle Lösung, die allerdings nicht die Anfangsbedingung erfüllt. Die Substitution $z(x) := (y(x) - \varphi(x))^{-1}$ führt dann auf die lineare Differentialgleichung

$$z'(x) = -\frac{1}{x}z(x) + \frac{1}{x^2}$$

mit dem Anfangswert $z(1) = (y(1) - \varphi(1))^{-1} = 2$. Die zugehörige Lösung der homogenen Gleichung ist

$$z_h(x) = c\exp(-\ln x) = c\frac{1}{x}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Eine spezielle Lösung der Differentialgleichung für $z$ erhalten wir mit Variation der Konstanten. Setzen wir den Ansatz $z_{\mathrm{p}}(x) = c(x)\frac{1}{x}$ in die inhomogene Gleichung ein, so erhalten wir

$$c'(x)\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} \iff c'(x) = \frac{1}{x} \iff c(x) = \ln(x) + d, \quad d \in \mathbb{R}.$$

Wir wählen $z_{\mathrm{p}}(x) = \ln(x)\frac{1}{x}$ und erhalten als allgemeine Lösung

$$z(x) = \ln(x)\frac{1}{x} + c\frac{1}{x}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen der Anfangsbedingung führt auf $z(1) = c = 2$, d.h.

$$z(x) = z_h(x) + z_{\mathrm{p}}(x) = \ln(x)\frac{1}{x} + \frac{2}{x}.$$

Rücksubstitution liefert uns schließlich die Lösung

$$y(x) = \frac{x}{2 + \ln(x)} - \frac{1}{2}x, \qquad \text{für } x > e^{-2}.$$

**b)**
Die Differentialgleichung ist von der Form $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ mit

$$P(x,y) = y^2 - x^2 \quad , \quad Q(x,y) = -2xy.$$

Die Differentialgleichung ist nicht exakt, denn es gilt

$$P_y(x,y) = 2y \quad \neq \quad Q_x(x,y) = -2y.$$

Wir suchen einen intergrierenden Faktor $\mu = \mu(x)$. Für $\mu = \mu(x)$ soll $(\mu P)_y = (\mu Q)_x$ gelten, also

$$\mu(x)2y = -\mu(x)2y - 2\mu(x)',$$

$$\mu(x) = x^{-2}$$

Wir bekommen die exakte Differentialgleichung

$$(y^2x^{-2} - 1)dx - 2yx^{-1}dy = 0.$$

Für die Stammfunktion $F(x, y)$ gilt

$$F_y = -2yx^{-1} \Longrightarrow F = -y^2x^{-1} + g(x).$$

Aus der Bedingung

$$F_x = y^2x^{-2} - 1$$

bekommen wir, dass $g(x) = -x + C$ und $y^2 = \sqrt{Cx - x^2}$ gilt.

**Aufgabe 2**

**a)** Wir geben zwei verschiedene Möglichkeiten zur Berechnung von $e^{tA}$ an.

1. Möglichkeit: Es gilt

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 10 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 10 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = -4I = -2^2I.$$

Es folgt

$$A^3 = -2^2A, \quad A^4 = 2^4I, \quad A^5 = 2^4A, A^6 = -2^6I, ...$$

Induktiv erhalten wir

$$A^{2k} = (-1)^k 2^{2k} I, \quad A^{2k+1} = (-1)^k 2^{2k} A = \tfrac{1}{2}(-1)^k 2^{2k+1} A, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Setzen wir dies in die Exponentialreihe ein, so folgt schließlich

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n A^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} 2^{2k} t^{2k} I + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} 2^{2k+1} t^{2k+1} A \\ &= \cos(2t)I + \frac{1}{2}\sin(2t)A = \begin{pmatrix} \cos(2t) + 2\sin(2t) & -\sin(2t) \\ 5\sin(2t) & \cos(2t) - 2\sin(2t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Möglichkeit: Wir berechnen zunächst die Eigenwerte und Eigenräume von $A$. Das charakteristische Polynom der Matrix ist

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 4 - \lambda & -2 \\ 10 & -4 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 4.$$

Also haben wir die beiden (komplexen) Eigenwerte $\lambda_{1/2} = \pm 2i$. Die zugehörigen Eigenräume sind dann gegeben durch

$$\begin{aligned} \operatorname{Kern}(A - 2iI) &= \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 4 - 2i & -2 \\ 10 & -4 - 2i \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{5} + \frac{i}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \\ \operatorname{Kern}(A + 2iI) &= \operatorname{lin}\overline{\left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{5} + \frac{i}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{5} - \frac{i}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Eine komplexe Lösung ist

$$\begin{aligned}\vec{\phi}(t) &= e^{2it}\begin{pmatrix}\frac{2}{5}+\frac{i}{5}\\ 1\end{pmatrix} = (\cos(2t)+i\sin(2t))\begin{pmatrix}\frac{2}{5}+\frac{i}{5}\\ 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{2}{5}\cos(2t)-\frac{1}{5}\sin(2t)+\frac{2i}{5}\sin(2t)+\frac{i}{5}\cos(2t)\\ \cos(2t)+i\sin(2t)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{2}{5}\cos(2t)-\frac{1}{5}\sin(2t)\\ \cos(2t)\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\sin(2t)+\frac{1}{5}\cos(2t)\\ \sin(2t)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Für die weitere Rechnung wählen wir nun bekanntlich Real- und Imaginärteil von $\vec{\phi}(t)$ als linear unabhängige Lösungen, d.h. wir erhalten das Fundamentalsystem

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix}\frac{2}{5}\cos(2t)-\frac{1}{5}\sin(2t) & \frac{2}{5}\sin(2t)+\frac{1}{5}\cos(2t)\\ \cos(2t) & \sin(2t)\end{pmatrix}.$$

Mit $\Phi(0) = \begin{pmatrix}\frac{2}{5} & \frac{1}{5}\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ und $\Phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 5 & -2\end{pmatrix}$ erhalten wir schließlich

$$e^{tA} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix}\cos(2t)+2\sin(2t) & -\sin(2t)\\ 5\sin(2t) & \cos(2t)-2\sin(2t)\end{pmatrix}.$$

**b)** Die Lösung des Anfangswertpoblems ergibt sich nun mit der Formel

$$\vec{y}(t) = e^{tA}\vec{y}(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}\vec{b}(s)ds, \quad \vec{b}(s) := \begin{pmatrix}4s\\ -2s\end{pmatrix}.$$

Wir berechnen zunächst das Integral. Hierbei tauchen die folgenden beiden Integrale auf, die wir mit partieller Integration berechnen können:

$$\begin{aligned}\int_0^t s\sin(2t-2s)ds &= [s\tfrac{1}{2}\cos(2t-2s)]_0^t - \int_0^t \tfrac{1}{2}\cos(2t-2s)ds = \tfrac{1}{2}t-\tfrac{1}{4}\sin(2t),\\ \int_0^t s\cos(2t-2s)ds &= [-s\tfrac{1}{2}\sin(2t-2s)]_0^t + \int_0^t \tfrac{1}{2}\sin(2t-2s)ds = \tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}\cos(2t).\end{aligned}$$

Dies führt uns dann auf

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{(t-s)A}\vec{b}(s)ds &= \int_0^t \begin{pmatrix}10s\sin(2t-2s)+4s\cos(2t-2s)\\ 24s\sin(2t-2s)-2s\cos(2t-2s)\end{pmatrix}ds\\ &= \begin{pmatrix}5t-\frac{5}{2}\sin(2t)+1-\cos(2t)\\ 12t-6\sin(2t)-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2t)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir schließlich als Lösung

$$\begin{aligned}\vec{y}(t) &= e^{tA}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} + \int_0^t e^{(t-s)A}\vec{b}(s)ds\\ &= \begin{pmatrix}\sin(2t)+\cos(2t)\\ 3\sin(2t)+\cos(2t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1+5t-\frac{5}{2}\sin(2t)-\cos(2t)\\ -\frac{1}{2}+12t-6\sin(2t)+\frac{1}{2}\cos(2t)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1+5t-\frac{3}{2}\sin(2t)\\ -\frac{1}{2}+12t-3\sin(2t)+\frac{3}{2}\cos(2t)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

## Aufgabe 3

**a)** Hier liegt eine Euler'sche Differentialgleichung vor. Wir machen zunächst die Substitution $t := \ln(x)$ bzw. $x = e^t$. Für $u(t) := y(e^t)$ bzw. $y(x) = u(\ln(x))$ erhalten wir dann

$$y' = \frac{1}{x}u' \quad \text{und} \quad y'' = -\frac{1}{x^2}u' + \frac{1}{x^2}u''.$$

Setzen wir dies ein, so erhalten wir eine inhomogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$x^2y'' + xy' - y = x\ln x \iff u'' - u = te^t.$$

Wir bestimmen zunächst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung für $u$ mit dem Ansatz $u(t) = e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Dieser führt auf das charakteristische Polynom

$$\lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

mit den beiden Nullstellen $\lambda_{1/2} = \pm 1$. Damit ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung gegeben durch

$$u_{\text{hom}}(t) = c_1e^t + c_2e^{-t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Für eine spezielle Lösung machen wir nun einen Ansatz vom Typ der rechten Seite. Da vor $e^t$ ein Polynom ersten Grades steht und da $\sigma + i\omega = 1 + i \cdot 0 = 1$ eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, machen wir den Ansatz

$$u_{\text{p}}(t) = (at + b)t^1e^t = (at^2 + bt)e^t, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Hier haben wir die Ableitungen

$$\begin{aligned} u_{\text{p}}'(t) &= (at^2 + 2at + bt + b)e^t, \\ u_{\text{p}}''(t) &= (at^2 + 4at + bt + 2a + 2b)e^t. \end{aligned}$$

Setzen wir dies ein, so folgt

$$u_{\text{p}}'' - u_{\text{p}} = (4at + 2b + 2a)e^t \overset{!}{=} te^t \iff a = \frac{1}{4},\ b = -\frac{1}{4}.$$

Wir erhalten damit die spezielle Lösung $u_{\text{p}}(t) = \frac{1}{4}t(t-1)e^t$, sowie die allgemeine Lösung

$$u(t) = \frac{1}{4}t(t-1)e^t + c_1e^t + c_2e^{-t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Rücksubstitution führt schließlich auf die allgemeine Lösung der ursprünglichen Gleichung:

$$y(x) = \frac{1}{4}\ln(x)\big(\ln(x) - 1\big)x + c_1x + c_2\frac{1}{x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

**b)** Der Potenzreihenansatz

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k, \quad a_k \in \mathbb{R},$$

mit

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} ka_kx^{k-1} \quad \text{und} \quad y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_kx^{k-2}$$

führt auf

$$\begin{aligned} y''(x) - 2xy'(x) + 12y(x) &= \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_kx^{k-2}}_{\overset{\ell=k-2}{=} \sum_{\ell=0}^{\infty}(\ell+2)(\ell+1)a_{\ell+2}x^{\ell}} - \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} 2ka_kx^k}_{=\sum_{k=0}^{\infty} 2ka_kx^k} + \sum_{k=0}^{\infty} 12a_kx^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\big((k+2)(k+1)a_{k+2} - 2ka_k + 12a_k\big)x^k \overset{!}{=} 0 \\ \iff &\ (k+2)(k+1)a_{k+2} - 2ka_k + 12a_k = 0, \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0, \\ \iff &\ a_{k+2} = \frac{2k-12}{(k+2)(k+1)}a_k, \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Mit den Anfangswerten folgt $a_0 = 1$ und $a_1 = 0$. Laut Rekursionsvorschrift folgt damit

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{12}{2} \cdot a_0 = -6,\\
a_3 &= -\frac{10}{6} \cdot a_1 = 0, \quad \text{und damit: } a_k = 0 \quad \text{für alle ungeraden } k \in \mathbb{N}.\\
a_4 &= -\frac{8}{12} \cdot a_2 = 4,\\
a_6 &= -\frac{4}{30} \cdot a_4 = -\frac{8}{15},\\
a_8 &= \frac{0}{56} \cdot a_6 = 0, \text{und damit erneut: } a_k = 0 \quad \text{für alle geraden } k \geqslant 8.
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir $a_0 = 1$, $a_2 = -6$, $a_4 = 4$, $a_6 = -\frac{8}{15}$ und $a_k = 0$ für $k \neq 0, 2, 4, 6$. Dies führt auf die Lösung

$$y(x) = -\frac{8}{15}x^6 + 4x^4 - 6x^2 + 1.$$

**Aufgabe 4**

Wir betrachten die eindimensionale Wellengleichung mit Dirichlet-Randbedingungen

$$\begin{aligned}
&\partial_{tt}u(t,x) = \partial_{xx}u(t,x) \quad \text{für } t > 0,\ x \in (0,2),\\
&u(t,0) = 0 = u(t,2) \quad \text{für } t > 0
\end{aligned}$$

und machen den Ansatz $u_k(t,x) = v_k(t)w_k(x)$, $t > 0$, $x \in (0,2)$. Die Funktion $u_k(t,x)$ ist genau dann eine Lösung der Wellengleichung, wenn ein $\lambda_k \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$\begin{aligned}
(a) &\quad v_k''(t) = \lambda_k v_k(t)\\
(b) &\quad w_k''(x) = \lambda_k w_k(x)
\end{aligned}$$

gilt. Die allgemeine Lösung von $(b)$ lautet $w_k(x) = \alpha e^{\sqrt{\lambda_k}x} + \beta e^{-\sqrt{\lambda_k}x}$. Bei dem Ansatz $u_k(t,x) = v_k(t)w_k(x)$ ergibt sich für die Randbedingungen $u_k(t,0) = 0 = u_k(t,2)$: $v_k(t)w_k(0) = 0 = v_k(t)w_k(2)$, im nichttrivialen Fall $v_k \neq 0$ also $w_k(0) = 0 = w_k(2)$, d.h.

$$\begin{aligned}
(c) &\quad \alpha + \beta = 0\\
(d) &\quad \alpha e^{2\sqrt{\lambda_k}} + \beta e^{-2\sqrt{\lambda_k}} = 0.
\end{aligned}$$

Setzt man $(c)$ in $(d)$ ein, so ergibt sich die Bedingung

$$(e^{2\sqrt{\lambda}} - e^{-2\sqrt{\lambda}}) = 0.$$

Wir gehen weiterhin von dem nichttrivialen Fall $\lambda_k, \alpha \neq 0$ aus. Dann folgt $\sqrt{\lambda_k} = \frac{k}{2}\pi i$. Somit ist $w_k$ von der Gestalt $w_k(x) = \alpha e^{\frac{k}{2}\pi ix} - \alpha e^{-\frac{k}{2}\pi ix} = c_k \sin(\frac{k}{2}\pi x)$ mit $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$ Da $\sin(x) = -\sin(-x)$ gilt, können wir $k \in \mathbb{N}$ annehmen. Die allgemeine Lösung der Gleichung (a) für $\lambda_k = -\frac{\pi^2 k^2}{4}$ lautet $a_k \cos(\frac{k}{2}\pi t) + b_k \sin(\frac{k}{2}\pi t)$.
Damit lauten die separierte-Variablen-Lösungen

$$u_k(t,x) = (a_k \cos(\frac{k}{2}\pi t) + b_k \sin(\frac{k}{2}\pi t)) \sin(\frac{k}{2}\pi x) \qquad (t > 0, x \in [0,2])$$

mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $c_k \in \mathbb{R}$. Offensichtlich erfüllt eine konvergente Summe

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t,x)$$

die Differentialgleichung und die Randbedingungen. Aus den Anfangsbedingungen folgt, dass $a_k = 0$ für $k \neq 3$, $a_3 = 1$. Außerdem gilt $\frac{\pi k}{2} b_k = 0$ für $k \neq 6$ und $a_6 = \frac{1}{3\pi}$.
Als Lösung des Anfangswertproblems erhalten wir

$$u(t,x) = \frac{1}{3\pi}\sin(3\pi t)\sin(3\pi x) + \cos(\frac{3\pi}{2}t)\sin(\frac{3\pi}{2}x).$$