KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
Institut für Analysis

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektro- und Informationstechnik

PD Dr. Peer C. Kunstmann
Dr. Andreas Müller-Rettkowski

Herbst 2014
23.09.2014

Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1 [7+3 = 10 Punkte]

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$(1+x^2)y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = 0. \tag{$\bullet$}$$

(a) Berechnen Sie mit Hilfe eines (gewöhnlichen) Potenzreihenansatzes $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ die Lösung des dazugehörigen Anfangswertproblems mit $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$.

(b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ($\bullet$).

Lösung:

(a) Der (gewöhnliche) Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ mit $y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}$ und $y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1)x^{k-2}$ führt eingesetzt in die Differentialgleichung auf

$$\begin{aligned}
0 &= (1+x^2)\sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1)x^{k-2} - 2x\sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1} + 2\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1)x^{k-2} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1)x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 2a_k k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} 2a_k x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2}(k+2)(k+1)x^k + \sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1)x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 2a_k k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} 2a_k x^k \\
&= 2a_2 + 2a_0 + 6a_3 x + \sum_{k=2}^{\infty} x^k \left[a_{k+2}(k+2)(k+1) + a_k(k(k-1) - 2k + 2)\right] \\
&= 2(a_2 + a_0) + 6a_3 x + \sum_{k=2}^{\infty} x^k \left[a_{k+2}(k+2)(k+1) + a_k(k-1)(k-2)\right]
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert die Gleichungen

$$a_2 + a_0 = 0 \tag{1}$$

$$a_3 = 0 \tag{2}$$

$$a_{k+2}(k+2)(k+1) + a_k(k-1)(k-2) = 0, \quad k \geq 2, \tag{3}$$

welche auf die Rekursionsformel für die Koeffizienten

$$a_{k+2} = -a_k \frac{(k-2)(k-1)}{(k+2)(k+1)}, \quad k \geq 2$$

führt. Aus den Anfangswerten erhält man $y(0) = a_0 = -1$ und $y'(0) = a_1 = 0$.

Wegen $a_1 = a_3 = 0$ folgt mit (3)

$$a_{2m+1} = 0 \quad \text{für} \quad m \in \mathbb{N}.$$

Gleichung (1) liefert $a_2 = 1$ und damit wegen (3)

$$a_4 = -a_2 \frac{0 \cdot 1}{4 \cdot 3} = 0, \quad a_6 = 0, \quad \text{allgemein} \quad a_{2m} = 0 \quad \text{für} \quad m \geq 2.$$

Es folgt

$$y(x) = -1 + x^2.$$

(b) Die Differentialgleichung (●) ist 2. Ordnung linear. Somit gibt es zwei linear unabhängige Fundamentallösungen. Die zweite erhält man z.B. aus (a) mit $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$. Eingesetzt in die Rekursionsgleichung erhält man

$$\begin{aligned} a_{2m} &= 0 \quad \text{für alle} \quad m \geq 0 \\ a_{2m+1} &= 0 \quad \text{für alle} \quad m \geq 1, \end{aligned}$$

und damit $y_2(x) = x$. Sei $y_1(x) = -1 + x^2$, dann sind y_1 und y_2 linear unabhängig und es gilt

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1(x^2 - 1) + c_2 x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C},$$

ist die allgemeine Lösung der DGL.

Aufgabe 2 [10 Punkte]

Lösen Sie das Anfangswertproblem für die Funktionen $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} y_1'(x) + 2y_1(x) &= 2\mathrm{i}y_2(x) \\ y_2'(x) - y_2(x) &= -2\mathrm{i}y_1(x) + e^{2x} \end{aligned} \quad , \quad \text{mit} \quad y_1(1) = 0, y_2(1) = 0.$$

Lösung: Setze $y(x) = (y_1(x), y_2(x))$. Dann lässt sich das gegebene System in der Form $y'(x) = Ay(x)+b(x)$ schreiben mit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}, \quad b(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2x} \end{pmatrix}, \quad y(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung des Systems ist daher gegeben durch (Variation der Konstanten)

$$y(x) = e^{(x-1)A}y(1) + e^{xA}\int_1^x e^{-sA}b(s)\,\mathrm{d}s = e^{xA}\int_1^x e^{-sA}b(s)\,\mathrm{d}s.$$

Es bleibt also das Matrixexponential e^{xA} zu berechnen. Wegen $A^* = A$ besitzt die Matrix A nur reelle Eigenwerte, welche man aus den Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{1}) = (-2-\lambda)(1-\lambda) - 4 = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

erhält. Diese sind $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = 2$, mit den entsprechenden Eigenräumen

$$\begin{aligned} \mathscr{E}(-3) &= \ker(A + 3\mathbb{1}) = \ker\begin{pmatrix} 1 & 2\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} & 4 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & 2\mathrm{i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} -2\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \\ \mathscr{E}(2) &= \ker(A - 2\mathbb{1}) = \ker\begin{pmatrix} -4 & 2\mathrm{i} \\ -2\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ -2\mathrm{i} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Setzte $S = \begin{pmatrix} -2\mathrm{i} & 1 \\ 1 & -2\mathrm{i} \end{pmatrix}$, dann gilt

$$S^{-1} = \frac{1}{-4-1}\begin{pmatrix} -2\mathrm{i} & -1 \\ -1 & -2\mathrm{i} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2\mathrm{i} & 1 \\ 1 & 2\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

und damit

$$S^{-1}AS = \operatorname{diag}(-3, -2) =: D.$$

Es folgt

$$e^{xA} = e^{xSDS^{-1}} = Se^{xD}S^{-1} = S\begin{pmatrix} e^{-3x} & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix}S^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4e^{-3x} + e^{2x} & 2\mathrm{i}(e^{2x} - e^{-3x}) \\ 2\mathrm{i}(e^{-3x} - e^{2x}) & e^{-3x} + 4e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Die Lösung des Systems ist also

$$y(x) = \int_1^x e^{(x-s)A}b(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{5}\int_1^x \begin{pmatrix} 2\mathrm{i}(e^{2x} - e^{-3x+5s}) \\ e^{-3x+5s} + 4e^{2x} \end{pmatrix}\mathrm{d}s = \begin{pmatrix} \frac{2\mathrm{i}}{5}e^{2x}(x-1) - \frac{2\mathrm{i}}{25}(e^{2x} - e^{5-3x}) \\ \frac{1}{25}(e^{2x} - e^{5-3x}) + \frac{4}{5}e^{2x}(x-1) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 [10 Punkte]

Im Folgenden soll das Randwertproblem

$$\begin{aligned} 3D_1u(x,y) + 2D_2u(x,y) &= \sin(2x-3y) \\ u(x,0) &= xe^x \end{aligned} \tag{$\bullet\bullet$}$$

für $x, y \in \mathbb{R}$ gelöst werden. Gehen Sie dabei *zum Beispiel* wie folgt vor:

(i) Bestimmen Sie eine Funktion $v(x,y)$ mit

$$\begin{aligned} 3D_1v(x,y) + 2D_2v(x,y) &= 0 \\ v(x,0) &= xe^x. \end{aligned}$$

(ii) Bestimmen Sie eine Funktion $w(x,y)$ mit

$$\begin{aligned} 3D_1w(x,y) + 2D_2w(x,y) &= \sin(2x-3y) \\ w(x,0) &= 0. \end{aligned}$$

(iii) Bestimmen Sie die Lösung des Randwertproblems ($\bullet\bullet$).

LÖSUNG: **Variante 1**:

(i) Die DGL ist äquivalent zu $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \nabla v(x,y) = 0$. Definiert man neue Koordinaten (ξ, η) via

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

so gilt für $\tilde{v}(\xi,\eta) = v\left(A \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) = v(3\xi + \eta, 2\xi)$

$$D_1\tilde{v}(\xi,\eta) = 3D_1v(3\xi+\eta, 2\xi) + 2D_2v(3\xi+\eta, 2\xi).$$

Aus der Differentialgleichung für v liest man ab

$$D_1\tilde{v}(\xi,\eta) = 0$$

und somit $\tilde{v}(\xi,\eta) = f(\eta)$ mit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ beliebig. Dann gilt aber

$$v(x,y) = \tilde{v}\left(A^{-1}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) = \tilde{v}\left(\tfrac{y}{2}, \tfrac{1}{2}(2x-3y)\right) = f\left(\tfrac{1}{2}(2x-3y)\right).$$

Aus den Randbedingungen folgt $v(x,0) = f(x) = xe^x$ und damit

$$v(x,y) = f\left(\tfrac{1}{2}(2x-3y)\right) = \tfrac{1}{2}(2x-3y)e^{\frac{1}{2}(2x-3y)}.$$

(ii) Aus Aufgabenteil (a) weiß man $2x - 3y = 2\eta$. Damit lautet die Differentialgleichung für $\tilde{w}(\xi,\eta) = w\left(A\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\right) = w(3\xi+\eta, 2\xi)$ in den Koordinaten (ξ,η)

$$D_1\tilde{w}(\xi,\eta) = \sin(2\eta).$$

Integration der Gleichung nach ξ liefert

$$\tilde{w}(\xi,\eta) = \big(\xi + g(\eta)\big)\sin(2\eta)$$

bzw. rücktransformiert in die ursprünglichen Koordinaten

$$w(x,y) = \tilde{w}\left(\tfrac{y}{2}, \tfrac{1}{2}(2x-3y)\right) = \left(\tfrac{y}{2} + g\left(\tfrac{1}{2}(2x-3y)\right)\right)\sin(2x-3y).$$

Aus der Randbedingung $w(x,0) = g(x)\sin(2x) = 0$ erhält man $g(x) = 0$ und somit

$$w(x,y) = \tfrac{y}{2}\sin(2x-3y).$$

(iii) Die Lösung des vollen inhomogenen Randwertproblems ist gegeben durch (Superpositions-Prinzip)

$$u(x,y) = v(x,y) + w(x,y) = \tfrac{1}{2}(2x-3y)e^{\frac{1}{2}(2x-3y)} + \tfrac{y}{2}\sin(2x-3y).$$

Variante 2: Bei der Differentialgleichung handelt es sich um ein Anfangswertproblem für eine inhomogene Transportgleichung (in einer Dimension, mit Zeit $t = y$) von der Form

$$\begin{aligned} D_2u(x,y) + cD_1u(x,y) &= f(x,y)\\ u(x,0) &= g(x)\end{aligned}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$u(x,y) = g(x-cy) + \int_0^y f(x+c(z-y), z)\,\mathrm{d}z.$$

Hier ist $c = \frac{3}{2}$, $f(x,y) = \frac{1}{2}\sin(2x-3y)$, $g(x) = xe^x$ und somit

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \left(x - \tfrac{3}{2}y\right)e^{x-\frac{3}{2}y} + \frac{1}{2}\int_0^y \sin(2(x+\tfrac{3}{2}(z-y)) - 3z)\,\mathrm{d}z\\ &= \left(x - \tfrac{3}{2}y\right)e^{x-\frac{3}{2}y} + \frac{1}{2}\int_0^y \sin(2x-3y)\,\mathrm{d}z\\ &= \left(x - \tfrac{3}{2}y\right)e^{x-\frac{3}{2}y} + \frac{1}{2}y\sin(2x-3y).\end{aligned}$$

Aufgabe 4 [2+3+5 = 10 Punkte]

(a) Geben Sie das zur linearen Differentialgleichung

$$y'''(x) + 7y''(x) - 3y'(x) + 4y(x) = e^x$$

äquivalente System erster Ordnung an.

(b) Die Funktionen $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^2 + 5e^{-x}\sin 2x$, $y_3(x) = x^2 - e^{(2\mathrm{i}-1)x}$ sind Lösungen der Differentialgleichung

$$y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = 2 + 4x + 5x^2.$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung.

(c) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$y^2 + (1 + xy)y' = 0$$

nicht exakt ist und bestimmen Sie einen integrierenden Faktor μ, der nur vom Produkt xy abhängt, $\mu(x, y) = \rho(xy)$.

Lösung:

(a) Setze $z(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$z'(x) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \\ y'''(x) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & -7 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^x \end{pmatrix}}_{=:b(x)}.$$

Also ist $z'(x) = Az(x) + b(x)$ das zur obigen DGL äquivalente System.

(b) Es handelt sich um eine inhomogene, lineare Differentialgleichung 2. Ordnung, deren Lösungsraum gegeben ist durch

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_h + y_p$$

wobei $\mathscr{L}_h$ den zweidimensionalen Lösungsraum der homogenen Differentialgleichung und y_p eine partikuläre Lösung der ihhomogenen DGL bezeichnet. Da Differenzen von Lösungen den inhomogenen Gleichung der homogenen DGL genügen, erhält man wegen

$$\begin{aligned} y_1(x) - y_2(x) &= -5e^{-x}\sin 2x \\ y_1(x) - y_3(x) &= e^{(2\mathrm{i}-1)x} = e^{-x}(\cos 2x + \mathrm{i}\sin 2x) \\ y_2(x) - y_3(x) &= e^{-x}((5 + \mathrm{i})\sin 2x + \cos 2x) \end{aligned}$$

den Lösungsraum der homogenen Gleichung zu

$$\mathscr{L}_h = \mathrm{lin}\{e^{-x}\sin 2x, e^{-x}\cos 2x\}.$$

Weiter liest man $y_p(x) = x^2$ ab. Die allgemeine Lösung der DGL ist daher von der Form

$$y(x) = x^2 + \alpha e^{-x}\sin 2x + \beta e^{-x}\cos 2x, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

(c) Die Differentialgleichung ist von der Form $f(x,y)\,\mathrm{d}x + g(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$ mit

$$f(x,y) = y^2 \quad \text{und} \quad g(x,y) = 1 + xy.$$

Wegen

$$\partial_y f(x,y) = 2y \neq y = \partial_x g(x,y)$$

ist die Differentialgleichung nicht exakt.
Für einen integrierenden Faktor $\mu(x,y) = \rho(xy)$ muss gelten $\partial_y(\mu f) = \partial_x(\mu g)$. Es ist

$$\begin{aligned}\partial_y(\mu f) &= \partial_y(\rho f) = (\partial_y \rho) f + \rho(\partial_y f) = \rho'(xy)xy^2 + \rho(xy)2y\\ \partial_x(\mu g) &= \partial_x(\rho g) = (\partial_x \rho) g + \rho(\partial_x g) = \rho'(xy)y(1+xy) + \rho(xy)2y.\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}\rho'(xy)y(1+xy) + \rho(xy)2y &= \rho'(xy)xy^2 + \rho(xy)2y \quad \text{bzw.}\\ \rho'(xy) &= \rho(xy).\end{aligned}$$

Diese Differentialgleichung für ρ liefert als integrierenden Faktor somit

$$\rho(xy) = e^{xy}$$

und die DGL

$$y^2 e^{xy}\,\mathrm{d}x + (1+xy)e^{xy}\,\mathrm{d}y = 0$$

ist exakt.