Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann

SS 2016
23.09.2016

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Elektrotechnik und Informationstechnik

Lösungsvorschläge zur Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1 (4+6=10 Punkte)

a) Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - 2y' + 2y = 2x\mathrm{e}^{2x}.$$

b) Geben Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' - \frac{1}{x+1}y + \mathrm{e}^x y^2 = -\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2(x+1)}\right)\mathrm{e}^{-x}, \qquad x > -1$$

$$y(0) = \frac{5}{2},$$

an.

Hinweis: Eine Lösung der Differentialgleichung (ohne Anfangswert) ist gegeben durch $\phi(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}$.

Lösungsvorschlag

a) Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung lautet

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda - (1+\mathrm{i}))(\lambda - (1-\mathrm{i})),$$

die einfachen Nullstellen sind somit $1 \pm \mathrm{i}$. Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung lautet demnach

$$y_h(x) = C_1\mathrm{e}^x\cos(x) + C_2\mathrm{e}^x\sin(x).$$

Für die komplette Lösung machen wir einen Ansatz vom Typ der rechten Seite. Da 2 keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, lautet dieser Ansatz

$$y_p(x) = (Ax + B)\mathrm{e}^{2x},$$

$$y_p'(x) = (2Ax + A + 2B)\mathrm{e}^{2x},$$

$$y_p''(x) = 4(Ax + A + B)\mathrm{e}^{2x}.$$

Setzen wir dies in die ursprüngliche Gleichung ein, erhalten wir

$$2x\mathrm{e}^{2x} = y_p'' - 2y_p' + 2y_p = (2Ax + 2A + 2B)\mathrm{e}^{2x}$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt $2A = 2$ und $2A + 2B = 0$, also $A = 1$ und $B = -1$. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist somit

$$y(x) = C_1 e^x \cos(x) + C_2 e^x \sin(x) + (x-1)e^{2x}.$$

b) Einsetzen von ϕ liefert

$$-\frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2(x+1)}e^{-x} + \frac{1}{4}e^{-x} = -\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2(x+1)}\right)e^{-x},$$

eine wahre Aussage. Es handelt sich um eine Riccatische Differentialgleichung. Die übliche Substitution $u = y - \phi$ ergibt für u die Bernoullische Differentialgleichung

$$u' + (1 - \frac{1}{x+1})u + e^x y^2 = 0, \quad u(0) = y(0) - \phi(0) = 2,$$

welche wiederum durch Multiplikation mit $-u^{-2}$ und die Substitution $z = u^{-1}$ in die lineare Differentialgleichung

$$z' = (1 - \frac{1}{x+1})z + e^x, \quad z(0) = (u(0))^{-1} = \frac{1}{2},$$

übergeht. Um diese zu lösen benutzen wir die bekannte Formel und berechnen

$$A(x) = \int_0^x 1 - \frac{1}{s+1}\, ds = s - \log(s+1)|_{s=0}^x = x - \log(x+1).$$

Für den inhomogenen Teil benötigen wir noch den Term

$$\int_0^x e^{-A(s)} e^s\, ds = \int_0^x (s+1)\, ds = \frac{x^2}{2} + x.$$

Ingesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} z(x) &= \frac{1}{2}e^{A(x)} + e^{A(x)} \int_0^x e^{-A(s)} e^s\, ds = \frac{e^x}{2(x+1)} + \frac{e^x}{x+1}\left[\frac{x^2}{2} + x\right] \\ &= \frac{e^x}{2(x+1)}\left[x^2 + 2x + 1\right] = \frac{e^x(x+1)}{2} \end{aligned}$$

und die Rücksubstitution ergibt

$$y(x) = \phi(x) + \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{2}{e^x(x+1)} = \frac{1}{2e^x}\left(1 + \frac{4}{x+1}\right) \qquad \forall x > -1.$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} -3 & -\frac{11}{2} & -4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix} \vec{y} + \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -t \end{pmatrix}, \qquad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Zwei Eigenvektoren der obigen Matrix sind $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösungsvorschlag

Das charakteristische Polynom der Matrix, die wir A nennen, ist

$$
\begin{aligned}
p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -3-\lambda & -\frac{11}{2} & -4 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & \frac{3}{2} & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -\frac{11}{2} & \lambda-1 \\ 2 & 4-\lambda & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -2-\lambda & -4 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{Entw. 3. Sp.}}{=} (1-\lambda) \begin{vmatrix} -2-\lambda & -4 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)((-2-\lambda)(4-\lambda)+8) = -\lambda(1-\lambda)(2-\lambda).
\end{aligned}
$$

Die Eigenwerte sind also 0, 1 und 2. Für den Eigenraum zum Eigenwert 0 gilt

$$
\begin{aligned}
E_A(0) = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} -3 & -\frac{11}{2} & -4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix} &= \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\
= \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},
\end{aligned}
$$

für den Eigenraum zum Eigenwert 1

$$
\begin{aligned}
E_A(1) = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} -4 & -\frac{11}{2} & -4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} &= \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;|\cdot 2 \\
= \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},
\end{aligned}
$$

und für den Eigenraum zum Eigenwert 2

$$
\begin{aligned}
E_A(2) = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} -5 & -\frac{11}{2} & -4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} &= \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \;|\cdot(-1) \\
= \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},
\end{aligned}
$$

Das Fundamentalsystem besteht demnach aus den Funktionen

$$\phi_1(t) = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\phi_2(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\phi_3(t) = \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Mit der üblichen Methode finden wir nun die inverse Matrix von

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} -5 & \mathrm{e}^t & 3\mathrm{e}^{2t} \\ 2 & 0 & -2\mathrm{e}^{2t} \\ 1 & -\mathrm{e}^t & -\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix},$$

nämlich

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -5 & \mathrm{e}^t & 3\mathrm{e}^{2t} & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2\mathrm{e}^{-2t} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\mathrm{e}^t & -\mathrm{e}^{2t} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\mathrm{e}^t & -\mathrm{e}^{2t} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2\mathrm{e}^t & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -4\mathrm{e}^t & -2\mathrm{e}^{2t} & 1 & 0 & 5 \end{array}\right) \quad \Big| \cdot \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2} \quad \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\mathrm{e}^{2t} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2} & -\mathrm{e}^{-t} \\ 0 & 0 & -2\mathrm{e}^{2t} & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad \Big| \cdot \left(-\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{2}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\mathrm{e}^{2t} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2} & -\mathrm{e}^{-t} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{2} & -\mathrm{e}^{-2t} & -\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{2} \end{array}\right) \quad \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \underbrace{\begin{matrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\mathrm{e}^{-t}}{2} & -\mathrm{e}^{-t} \\ \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{2} & \mathrm{e}^{-2t} & \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{2} \end{matrix}}_{=\Phi(t)^{-1}} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right).$$

Nun berechnen wir die endgültige Lösung über die aus der Vorlesung bekannte Formel. Dazu beobachten wir, dass

$$\int_0^t \Phi(s)^{-1} \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ -s \end{pmatrix} \mathrm{d}s = \int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ s\mathrm{e}^{-s} \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}s \overset{\text{P.I.}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ -s\mathrm{e}^{-s}\big|_{s=0}^{t} + \int_0^t \mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}s = \begin{pmatrix} 0 \\ -(s+1)\mathrm{e}^{-s}\big|_{s=0}^{t} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-(t+1)\mathrm{e}^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

und deshalb folgt

$$y(t) = \Phi(t)\Phi(0)^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \Phi(t) \int_0^t \Phi(s)^{-1} \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ -s \end{pmatrix} \mathrm{d}s = \Phi(t) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \Phi(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1-(t+1)\mathrm{e}^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^{2t} - t - 1 \\ -2\mathrm{e}^{2t} \\ t + 1 - \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Man erhält die Lösung schneller, indem man nur $\Phi(0)^{-1}$ berechnet, über $\mathrm{e}^{tA} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}$ das Matrixexponential berechnet und die Lösungsformel benutzt, die nur e^{tA} beinhaltet.

Aufgabe 3 (5+5=10 Punkte)

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}y'' + (x+2)y' - 4y &= 35x^3 + 2x^2 + 2x, \\ y(0) &= 0, \\ y'(0) &= -1, \end{aligned}$$

mit einem Potenzreihenansatz.

b) Geben Sie alle nicht-konstanten Lösungen u der Gleichung

$$u_t + \mathrm{e}^{-t}u_{xx} = -(t+1)u, \qquad x, t \in \mathbb{R},$$

an, die die Form $u(x,t) = v(x)w(t)$ besitzen und für die $v(x+\pi) = v(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Finden Sie nun diejenige darunter, die zusätzlich

$$u(0,0) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}, \qquad u_x(0,0) = 0, \qquad u_{xx}(0,0) = -\frac{16}{\sqrt{\mathrm{e}}},$$

erfüllt.

Lösungsvorschlag

a) Wir beginnen mit dem Ansatz

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \\ y'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n, \\ y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n. \end{aligned}$$

Wir stellen zunächst fest, dass aus den Anfangsbedingungen durch Einsetzen folgt, dass

$$a_0 = y(0) = 0, \qquad a_1 = y'(0) = -1.$$

Setzen wir nun obige Darstellungen in die gegebene Gleichung ein, jeweils in der Form, sodass jeder Term nur die Potenz x^n enthält, so ergibt sich

$$\begin{aligned} 35x^3 + 2x^2 + 2x = \frac{1}{2}y''(x) + (x+2)y'(x) - 4y(x) &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n \\ &\quad + 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - 4\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2}(n+2)(n+1)a_{n+2} + 2(n+1)a_{n+1} + (n-4)a_n\right]x^n. \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt nun (wir erinnern uns an $a_0 = 0$, $a_1 = -1$)

$\underline{n=0}$: $0 = a_2 + 2a_1 - 4a_0 = a_2 - 2 \Rightarrow a_2 = 2$,

$\underline{n=1}$: $2 = 3a_3 + 4a_2 - 3a_1 = 3a_3 + 11 \Rightarrow a_3 = -3$,

$\underline{n=2}$: $2 = 6a_4 + 6a_3 - 2a_2 = 6a_4 - 22 \Rightarrow a_4 = 4$,

$\underline{n=3}$: $35 = 10a_5 + 8a_4 - a_3 = 10a_5 + 35 \Rightarrow a_5 = 0$,

$\underline{n \geqslant 4}$ $0 = \frac{1}{2}(n+2)(n+1)a_{n+2} + 2(n+1)a_{n+1} + (n-4)a_n \Rightarrow a_{n+2} = \frac{4(n+1)a_{n+1}+2(n-4)a_n}{(n+1)(n+2)}$

$\Rightarrow a_6 = \frac{2}{3}a_5 = 0 \Rightarrow a_n = 0 \forall n \geqslant 5$.

Somit ist die gesuchte Lösung

$$y(x) = 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x.$$

b) Setzen wir den Ansatz $u(x,t) = v(x)w(t)$ in die partielle Differentialgleichung ein, erhalten wir

$$v(x)w'(t) + e^{-t}v''(x)w(t) = -(t+1)v(x)w(t) \Leftrightarrow -\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w'(t)}{w(t)}e^t + (t+1)e^t.$$

Da beide Seiten nur von jeweils einer Variablen abhängen, müssen Sie konstant $\lambda \in \mathbb{R}$ sein. Für die linke Seite bedeutet dies

$$v''(x) = -\lambda v(x),$$

was nur für $\lambda \geqslant 0$ eine periodische Lösung ergibt, nämlich

$$v(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Damit $v(x+\pi) = v(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, muss $\sqrt{\lambda} = 2n$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelten, also $\lambda = 4n^2$. Für die rechte Seite folgt

$$w'(t) = (4n^2e^{-t} - (t+1))w(t),$$

was als lineare Gleichung die Lösung

$$w(t) = Ce^{-4n^2e^{-t} - \frac{(t+1)^2}{2}}$$

besitzt. Multiplikation der beiden Funktionen ergibt die separierten Lösungen

$$u_n(x,t) = e^{-4n^2e^{-t} - \frac{(t+1)^2}{2}}(C_1\cos(2nx) + C_2\sin(2nx)) \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Setzen wir die Anfangswerte ein, ergibt sich

$$u(0,0) = C_1e^{-4n^2-\frac{1}{2}} \stackrel{!}{=} \frac{1}{\sqrt{e}} \Leftrightarrow C_1 = e^{4n^2},$$

$$u_x(0,0) = 2nC_2e^{-4n^2-\frac{1}{2}} \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow C_2 = 0,$$

$$u_{xx}(0,0) = -4n^2C_1e^{-4n^2-\frac{1}{2}} \stackrel{!}{=} -\frac{16}{\sqrt{e}}.$$

Vergleichen wir die erste und dritte Zeile, so muss $-4n^2 = -16$, also $n = 2$ sein und aus der ersten Gleichung somit $C_1 = \mathrm{e}^{16}$. Die Lösung lautet somit

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{16(1-\mathrm{e}^{-t})-\frac{(t+1)^2}{2}}\cos(4x)$$