

Aufgabe 1

- a) Es handelt sich um eine lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Das char. Pol. lautet

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

mit einfachen Nullstellen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$.

Deshalb lautet die allgemeine Lösung des homogenen Problems

$$y_h(x) = \underline{C_1} e^x + \underline{C_2} e^{2x}$$

Die rechte Seite ist die Summe zweier Terme, die uns jeweils einen Ansatz für die spezielle Lösung liefern. Für x ist dies

$$y_{p,1}(x) = Ax + B,$$

da 0 keine Nullstelle des char. Pol. ist. Für e^x ist es

$$y_{p,2}(x) = Cxe^x,$$

da 1 eine einfache Nullstelle ist. Das liefert

$$y_p(x) = Ax + B + Cxe^x,$$

$$y_p'(x) = A + C(x+1)e^x,$$

$$y_p''(x) = C(x+2)e^x.$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} x + e^x &\stackrel{!}{=} y_p'' - 3y_p' + 2y_p = C(x+2)e^x - 3A \\ &\quad - 3C(x+1)e^x + 2Ax + 2B + 2Cxe^x \\ &= (2B - 3A) + 2Ax - Ce^x, \end{aligned}$$

woraus $C = -1$, $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{3}{4}$ folgt. Die allg. Lsg. lautet demnach

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4} - xe^x.$$

b) Wir wählen den Potenzreihenansatz

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

$$\begin{aligned} y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n. \end{aligned}$$

Einsetzen liefert

$$x^2 \stackrel{!}{=} y'' + x y' + y = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} + n a_n + a_n \right] x^n.$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$(1) \quad a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)} \quad (n \neq 2)$$

$$(2) \quad 12a_4 + 3a_2 = 1 \quad (n=2)$$

Die Anfangswerte liefern

$$a_0 = y(0) = 0, \quad a_1 = y'(0) = 0.$$

Mit (1) folgt nun

$$a_2 = -\frac{a_0}{2} = 0, \quad a_3 = -\frac{a_1}{3} = 0.$$

Mit (2) folgt dann $a_4 = \frac{1}{12}$ und mit (1)

wiederrum $a_{2k+1} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ sowie

$$\begin{aligned} a_{2k} &= -\frac{a_{2k-2}}{2k} = \frac{a_{2k-4}}{2k(2k-2)} = \frac{(-1)^2}{2^2} \frac{a_{2k-4}}{k(k-1)} \\ &= \dots = \frac{(-1)^{k-2}}{2^{k-2}} \frac{a_4}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 3} = \frac{(-1)^k}{3 \cdot 2^{k-1} k!} \quad (k \geq 2) \end{aligned}$$

Die Lösung lautet also

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3 \cdot 2^{k-1} k!} x^{2k} = \frac{2}{3} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^k}{k!} \\ &= \frac{2}{3} e^{-x^2/2} + \frac{x^2}{3} - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

a) Wir multiplizieren die Gleichung mit y^{-3} und differenzieren $z := y^{-2}$. Dann gilt

$$z' = -2y^{-3} y' \stackrel{\text{DGL}}{=} -y^{-2} + x = -z + x$$

Der Anfangswert wird zu $z(0) = (y(0))^{-2} = 4$.
Nun folgt

$$A(x) = \int_0^x -1 \, dt = -x,$$

kommt für die Lösung laut Formel

$$\begin{aligned} z(x) &= 4e^{-x} + e^{-x} \int_0^x e^{+t} \cdot t \, dt \\ &\stackrel{\text{P.I.}}{=} 4e^{-x} + e^{-x} \left[[e^{+t} \cdot t]_0^x - \int_0^x e^{+t} \, dt \right] \\ &= 4e^{-x} + e^{-x} [e^{+t}(t-1)]_0^x \\ &= 4e^{-x} + e^{-x} [e^x(x-1) + 1] \\ &= 5e^{-x} + (x-1) \end{aligned}$$

Für $x > 0$ gilt $z(x) > 0$, denn

$$z(x) \geq \begin{cases} 5e^{-x}-1, & x \in (0,1] \\ (x-1), & x > 1 \end{cases} > 0$$

Re substitution liefert

$$y(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{5e^{-x} + (x-1)}} \quad \text{oder} \quad y(x) = -\frac{1}{\sqrt{5e^{-x} + (x-1)}}$$

Da aber $y(0) = \frac{1}{2} > 0$ ist die Lösung

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{5e^{-x} + (x-1)}}, \quad x > 0.$$

b) Wir berechnen das char. Polynom der Matrix, also

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 5 & 4 \\ 1 & -\lambda & -4 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \stackrel{+}{=} \det \begin{pmatrix} 5 & 5-\lambda^2 & 4(1-\lambda) \\ 1 & -\lambda & -4 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Entw. 1. Spalte $\rightarrow \det \begin{pmatrix} 5-\lambda^2 & 4(1-\lambda) \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

$$= -(5-\lambda^2)(1-\lambda) + 4(1-\lambda)$$

$$= -(1-\lambda)(1-\lambda^2) = -(1-\lambda)^2(1+\lambda).$$

Die Eigenwerte sind also -1 (einfach) und 1 (2-fach).
Für -1 gilt

$$\ker \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \stackrel{+}{=} \ker \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \stackrel{+}{=} \ker \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} \stackrel{+}{=} \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

was die erste Lösung $\vec{\phi}_1(x) = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x}$ liefert.

Für 1 gilt

$$\ker \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{+}{=} \ker \begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{+}{=} \ker \begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{+}{=} \ker \begin{pmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Somit

$$\ker \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \ker \begin{pmatrix} 6 & -6 & -24 \\ -2 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \stackrel{+}{=} \ker \begin{pmatrix} 6 & -6 & -24 \\ -2 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{+}{=} \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

alt neu

Dies liefert die weiteren Lsg. $\vec{\phi}_2(x) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^x$ und

$$\vec{\phi}_3(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^x + x \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4x \\ 1 \\ x \end{pmatrix} e^x.$$

Aufgabe 3

a) Die linke Seite der Gleichung entspricht

$$(\nabla u)(x, t) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

was die Ableitung der Funktion $w(s) = u(x-2s, t+s)$ ist wegen der Kettenregel:

$$\begin{aligned} w'(s) &= \partial_x u(x-2s, t+s) \cdot (-2) + \partial_t u(x-2s, t+s) \\ &= (\nabla u)(x-2s, t+s) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} u(x, t) - u(x+2t, 0) &= w(0) - w(-t) \\ &= \int_{-t}^0 w'(s) \, ds = \int_{-t}^0 (\nabla u)(x-2s, t+s) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \, ds \\ &\stackrel{\text{DAL}}{=} \int_{-t}^0 e^{(x-2s)+(t+s)} \, ds = e^{x+t} \int_{-t}^0 e^{-s} \, ds \\ &= -e^{x+t} [e^{-s}]_{-t}^0 = -e^{x+t} (1 - e^t) \\ &= (e^t - 1) e^{x+t} \end{aligned}$$

Wegen $u(x+2t, 0) = \cos(x+2t)$ (siehe DAL) folgt

$$u(x, t) = \cos(x+2t) + (e^t - 1) e^{x+t}$$

für alle $x, t \in \mathbb{R}$.

b) Der Separationsansatz liefert $u(x, t) = v(x)w(t)$
 liefert $w'(t)v(x) = u_{tt}(x, t) = u_{xx}(x, t) = v''(x)w(t)$.
 $\Rightarrow \frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w''(t)}{w(t)} = \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1)$

$$(1) \Rightarrow v''(x) = \lambda v(x). \quad (2)$$

Aus den Randbedingungen folgt
 $u(0, t) = v(0)w(t) = 0, \quad u(1, t) = v(1)w(t) = 0 \Rightarrow$
 $v(0) = v(1) = 0 \quad (3)$

Fall 1: $\lambda > 0$. Dann $(2) \Rightarrow v(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$.

$$\left. \begin{array}{l} v(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1 \\ v(1) = 0 \Rightarrow C_1 e^{\sqrt{\lambda}} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} C_2 = -C_1 \\ C_1 (e^{\sqrt{\lambda}} - e^{-\sqrt{\lambda}}) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\neq 0$ da $\lambda > 0$

$C_1 = C_2 = 0 \leadsto$ das liefert
 nur die triviale Lösung.

Fall 2: $\lambda = 0$. Dann $(2) \Rightarrow v(x) = C_1 x + C_2$.

$$\left. \begin{array}{l} v(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \\ v(1) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0 \leadsto$$

das liefert nur die triviale Lösung.

Fall 3: $\lambda < 0$. Dann $(2) \Rightarrow v(x) = C_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x)$.

$$v(0) = 0 \Rightarrow C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0.$$

$$v(1) = 0 \Rightarrow C_2 \sin(\sqrt{-\lambda}) = 0 \quad (\text{da } C_1 = 0).$$

Da C_1 bekommen wir nicht triviale Lösung nur wenn $C_2 = 0$.

$$\sin(\sqrt{-\lambda}) = 0 \stackrel{\lambda < 0}{\implies} \sqrt{-\lambda} = n\pi, n \in \mathbb{N} \implies \lambda_n = -n^2 \pi^2.$$

das liefert die Lösung $v_n(x) = C_2 \sin(n\pi x)$.

$$\text{und (I) } \implies w_n''(t) = \lambda_n w_n(t) = -n^2 \pi^2 w_n(t)$$

$$\implies w_n(t) = D_1 \cos(n\pi t) + D_2 \sin(n\pi t).$$

Deshalb die Lösungen der Form $u(x, t) = w(t)v(x)$ sind

$$u_n(x, t) = w_n(t)v_n(x) = (\tilde{D}_1 \cos(n\pi t) + \tilde{D}_2 \sin(n\pi t)) \sin(n\pi x)$$

$$\tilde{D}_1, \tilde{D}_2 \in \mathbb{R}$$

$$\{ \tilde{D}_1 = C_2 D_1, \tilde{D}_2 = C_2 D_2 \}.$$

mit $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4

a) Es gilt $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, also induktiv $B^{2k} = I$ und $B^{2k+1} = B$ ($k \in \mathbb{N}_0$). Somit folgt

$$\begin{aligned} e^{tB} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n B^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k} B^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1} B^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \cdot I + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot B \\ &= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}}_2 + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}}_{-2} I + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}}_2 - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}}_{-2} B \\ &= \frac{e^t + e^{-t}}{2} \cdot I + \frac{e^t - e^{-t}}{2} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{e^t + e^{-t}}{2} & \frac{e^t - e^{-t}}{2} \\ \frac{e^t - e^{-t}}{2} & \frac{e^t + e^{-t}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Wir definieren $z(t) = (x(t), x'(t), y(t), y'(t))^T$. Es folgt

$$\begin{aligned} z'(t) &= \begin{pmatrix} x'(t) \\ x''(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) - x'(t) - 2x(t) \\ y'(t) \\ x'(t) + 2y(t) + 3y'(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} z(t) \end{aligned}$$

c) Eine Lösung ist $y_1(x) = e^x$. Ansatz: $y(x) = v(x)y_1(x)$.
Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} x(v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'') - 2(x+1)(v'y_1 + vy_1') + (x+2)vy_1'' \\ &= v(x y_1'' - 2(x+1)y_1' + (x+2)y_1) + x y_1 v'' + (2y_1' - 2(x+1)y_1)v' \\ &\stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

$$y_1 = e^x \Rightarrow x e^x v'' - 2 e^x v' = 0$$

$$x > 0 \Rightarrow v'' - \frac{2}{x} v' = 0 \quad \omega = v' \Rightarrow \omega' = \frac{2}{x} \omega$$

$$\Rightarrow \omega(x) = C x^2 \Rightarrow v(x) = \sum_{i=1}^2 \frac{C_i}{3} x^3 + C_2$$

$$\Rightarrow y(x) = C_1 x^3 e^x + C_2 e^x \quad \stackrel{!}{=} \tilde{C}_1$$